МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)
Кафедра комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем (КИБЭВС)

Утверждаю:
Зав. кафедрой КИБЭВС
профессор
________________А.А. Шелупанов
«___» _____________2012 г.

Методические указания для выполнения практических и самостоятельных работ
Основы теории надежности автоматизированных систем управления (АСУ)
для студентов специальности
090105 "Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем" и
210202 «Проектирование и технология ЭВС»

Разработчик:
доцент кафедры КИБЭВС
_____________ Л.П. Серафинович

Томск – 2012

Содержание

Введение

Практические и самостоятельные работы по дисциплине преследуют следующие цели:

– обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний и основных положений теории надежности;

– обучение методикам практического расчета показателей надежности;

– формирование умений применять полученные знания на практи-

ке.

Практические занятия (16 час)

1.	Расчет показателей надежности элементов	2
2.	Расчет надежности нерезервированных устройств	2
3.	Расчет надежности резервированных устройств	6
4.	Расчет допусков размерных цепей	4
5.	Задачи оптимального резервирования	2
	Итого	16

Самостоятельная работа (48 часов)

Самостоятельная работа включает следующие задания:

№	Наименование работы	Часов	Контроль
1	Подготовка к лекциям, повторение учебного материала предыдущих лекций	10	Тестовый опрос
2	Выполнение домашних заданий		
2.1	Расчет показателей надежности элементов	2	Проверка на занятиях
2.2	Расчет надежности нерезервированных устройств	2	Проверка на занятиях
2.3	Расчет надежности резервированных устройств	2	Проверка на занятиях
2.4	Расчет допусков размерных цепей	2	Проверка на занятиях
2.5	Задачи оптимального резервирования	2	Проверка на занятиях
3	Составление конспектов по темам		
3.1	Критерии и показатели надежности	2	Проверка на занятиях

3.2	Надежность типовых элементов	4	Проверка на занятиях
3.3	Факторы, влияющие на надежность	4	Проверка на занятиях
3.4	Методы повышения точности работы цепей	4	Проверка на занятиях
3.5	Надёжность резервированных систем с переключателями	4	Проверка на занятиях
4	Выполнение индивидуальных заданий		
4.1	Окончательный расчет надежности	5	Проверка на занятиях
4.2	Расчет допусков	5	Проверка на занятиях
	Итого	48	

Тема 1. Расчет показателей надежности

Цель занятия — изучить основные показатель надежности и базовые методики для их определения

1.1. Показатели надежности неремонтируемой аппаратуры

1.1.1 Вероятность безотказной работы (ВБР) P(t) – вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ не возникнет.

Иначе, вероятность того, что наработка T от момента первого включения до момента первого отказа будет не меньше заданной продолжительности работы $t_з$, т.е.

$$P(t) = вер(T > t_з).$$

Используется для невосстанавливаемых изделий или для восстанавливаемых изделий на период между профилактиками.

Вероятность безотказной работы является наиболее полной характеристикой надежности изделия. Этот показатель может быть получен сравнительно просто расчетным путем.

Вероятность безотказной работы определяется по статистической формуле

$$P(t) = \frac{N_{раб}(t)}{N_o} = \frac{N_o - N_{отк}(t)}{N_o} = \frac{N_o - \sum_{i=1}^{t/\Delta t_i} n_i}{N_o},$$

где N_o – количество изделий, поставленных на испытание;

$N_{раб}(t)$ – количество изделий, исправно работающих к рассматриваемому моменту времени;

$N_{отк}(t)$ – количество изделий, отказавших к моменту времени t;

n_i – количество изделий, отказавших за промежуток времени Δt_i;

$t/\Delta t_i$ – количество промежутков времени, на которое разбито время испытаний.

Событием, противоположным исправной работе, является отказ. Поэтому вероятность отказа

$$Q(t) = 1 – P(t)$$

или

$$Q(t) = \text{вер}(T < t_з).$$

Следовательно, вероятность отказа является интегральной функцией распределения времени безотказной работы, т.е.

$$Q(t) = F(t).$$

Производная от интегральной функции распределения есть дифференциальная функция распределения времени безотказной работы или плотность распределения времени безотказной работы

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}.$$

Проинтегрировав это выражение, получим, что вероятность отказа

$$Q(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt$$

и вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - \int_0^t f(t) \cdot dt = \int_t^\infty f(t) \cdot dt.$$

Вероятность безотказной работы есть убывающая функция времени

$$0 \le P(t) \le 1; \qquad P(t = 0) = 1; \qquad P(t = +\infty) = 0.$$

Одна из форм зависимостей P(t) и Q(t) приведена на рис. 1.1.

Вероятность P(t) позволяет определить количество исправных изделий в момент времени t: $N = N_o(t) \cdot P(t)$.

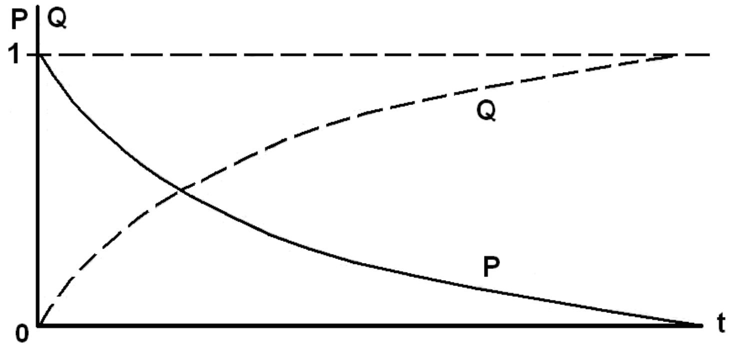


Рис. 1.1

Наряду с вероятностью безотказной работы используется показатель условной вероятности безотказной работы, который определяет вероятность безотказной работы изделия на интервале $t_1 \ldots t_2$, при условии, что оно проработало безотказно время t_1:

$$P(t_1, t_2) = \frac{P(t_2)}{P(t_1)} = \frac{P(t_1; t_1 + \Delta t)}{P(t_1)}.$$

Как будет показано далее, условная вероятность не зависит от положения отрезка Δt на оси, а зависит только от его длины.

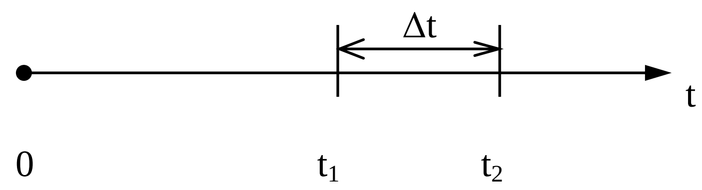


Рис. 1.2

1.1.2 Частота отказов (относительная частота отказов) a(t) – отношение количества отказавших однотипных изделий в единицу времени к количеству изделий, поставленных на испытания при условии, что все они испытываются в одинаковом режиме, не заменяются исправными и не восстанавливаются в случае возникновения отказа. Статистическая формула для определения частоты отказов имеет вид

$$a(t) = \frac{n(\Delta t)}{\Delta t \cdot N_o},\ 1/ч,$$

где $n(\Delta t)$ – количество изделий, отказавших в период времени

$$\text{от } t - \frac{\Delta t}{2} \text{ до } t + \frac{\Delta t}{2};$$

Δt – интервал времени.

Типичная кривая изменения частоты отказов во времени приведена на рис. 1.3.

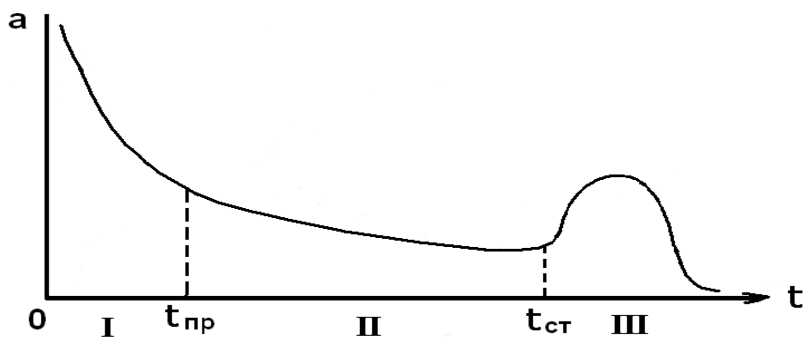


Рис. 1.3

Из рис. 1.3 следует, что время работы изделия разделяется на три характерных участка:

I – участок приработки ($t_{пр}$ – время приработки);

II – участок основной работы ($t_{пр}$ … $t_{ст}$);

III – участок старения ($t_{ст}$ – время начала старения).

На участке приработки отказы происходят по вине дефектов производства (ослабленные элементы, ошибки технологии и т.п.) По мере выхода из строя дефектных элементов вследствие отказов частота отказов уменьшается.

На участке основной работы, который должен быть для надежных изделий много больше первого и третьего вместе взятых, отказы носят случайный характер, хотя в конце участка отказы могут быть и по причине старения.

Участок III характеризуется сначала ростом частоты отказов, а затем уменьшением до нуля. Рост объясняется старением (износом) изделий; падение тем, что исправных изделий становится все меньше.

Для надежной работы изделий необходимо применять их на участке основной работы (II). Для этого следует исключить I-й участок путем тренировки изделий в течение времени от 0 до $t_{пр}$, а III-й участок исключается путем снятия изделий с эксплуатации.

Статистическую формулу для частоты отказов можно привести к вероятностному виду, заменив $n(\Delta t)$ выражением

$$n(\Delta t) = N(t) - N(t+\Delta t) = N_o \cdot P(t) - N_o \cdot P(t+\Delta t) = N_o \cdot [P(t) - P(t+\Delta t)],$$

где $N(t)$ и $P(t)$ – количество исправных изделий и вероятность их безотказной работы к моменту времени t (начало периода Δt);

$N(t+\Delta t)$ и $P(t+\Delta t)$ – количество исправных изделий и вероятность их безотказной работы к моменту времени $t+\Delta t$ (конец периода Δt).

Тогда

$$a(t) = \frac{n(\Delta t)}{\Delta t \cdot N_o} = \frac{N_o[P(t) - P(t+\Delta t)]}{\Delta t \cdot N_o}.$$

Устремляя Δt к нулю и переходя к пределу, получаем

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{\Delta t} = -\frac{d\,P(t)}{d\,t} = \frac{d\,Q(t)}{d\,t} = f(t).$$

Следовательно, частота отказов a(t) есть плотность распределения (плотность вероятности) времени безотказной работы неремонтируемых изделий.

1.1.3 Интенсивность отказов – $\lambda(t)$ – условная плотность вероятности возникновения отказа объекта, определяемая при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не возник.

Интенсивность отказов статистически определяется как отношение количества отказавших изделий в единицу времени к количеству изделий, исправно работающих к рассматриваемому моменту времени при условии, что все изделия однотипные, испытываются в одинаковых режимах, а отказавшие изделия новыми не заменяются и не восстанавливаются в случае возникновения отказа:

$$\lambda(t) = \frac{n(\Delta t)}{\Delta t \cdot N_{раб}(t)},\ 1/ч.$$

Этот показатель более важен, чем частота отказов, т.к. он определяет количество изделий, которые отказали за интервал Δt, от числа работающих к моменту t исправных изделий. Частота же отказов определяет количество отказавших изделий за интервал Δt от числа изделий поставленных на испытания, т.е. может быть достаточно давно. Это не представляет особого интереса.

Зависимость интенсивности отказов от времени для электронных изделий и электрорадиоэлементов (ЭРЭ) характеризуется типичной кривой, приведенной на рис. 1.4.

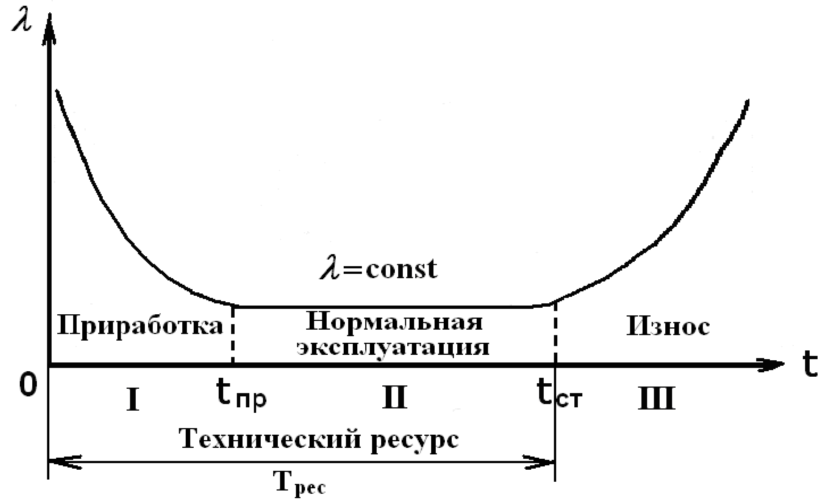


Рис. 1.4

Кривая имеет те же характерные участки, что и кривая частоты отказов. На I-м участке отказы определяются технологическими дефектами. На II-м участке – внезапные отказы. На III-м участке – отказы по причине старения изделия (постепенные отказы).

Интенсивность отказов существенно зависит от электрических нагрузок и нагрузок, обусловленных внешними воздействиями.

Если полагать, что на рис. 1.4 приведена зависимость λ от времени для нормальных условий эксплуатации, то при облегченной нагрузке эта зависимость идет ниже, растягивается несколько I-й участок и существенно увеличивается участок основной работы II, т.е. увеличивается технический ресурс

$$T_{рес} = T_{I} + T_{II} .$$

Как показывает опыт, на участке основной работы интенсивность отказов, пока старение элементов еще не наступило, определяется случайными отказами и является величиной постоянной

$$\lambda(t) = \lambda = const.$$

Преобразуя статистическую формулу для определения интенсивности отказов, установим связь между тремя основными показателями безотказности P(t), a(t) и λ(t).

$$\lambda(t) = \frac{n(\Delta t)}{\Delta t \cdot N_{раб}(t)} = \frac{N_o[P(t) - P(t+\Delta t)]}{\Delta t \cdot N_o \cdot P(t)}.$$

Устремляем Δt к нулю и переходим к пределу, получаем

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{\Delta t \cdot P(t)} = -\frac{dP(t)}{dt} \cdot \frac{1}{P(t)} = \frac{a(t)}{P(t)} \text{ и } a(t) = \lambda(t) \cdot P(t).$$

Запишем из приведенного выражения

$$\lambda(t)\cdot dt = -\frac{dP(t)}{P(t)}$$

и проинтегрируем

$$\int_0^t \lambda(t)\cdot dt = -\int_0^t \frac{1}{P(t)}\cdot dP(t) = -\ln P(t).$$

Откуда

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)\cdot dt}.$$

При работе на II-м участке, где λ = const,

$$P(t) = e^{-\lambda\cdot t} \text{ и } a(t) = \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}$$

– экспоненциальный закон надежности.

Используя полученную зависимость, можно показать, что условная вероятность зависит только от длины участка, но не от его положения на оси времени

$$P(t_1,t_2) = \frac{P(t_1, t+\Delta t)}{P(t_1)} = e^{-\lambda(t_1+\Delta t)} \Big/ e^{-\lambda\cdot t_1} = e^{-\lambda\cdot\Delta t}.$$

В отличие от зависимости λ от времени, приведенной на рис. 1.4 интенсивность отказов возрастает, например, у электромеханических устройств (ЭМУ) и механических устройств (МУ) вследствие износа.

Попутно отметим снижение интенсивности отказов для программного обеспечения (ПО) из-за устранения программных ошибок.

Все указанные зависимости приведены на рис. 1.5.

Удобство применения интенсивности отказов λ для использования в расчетах надежности объясняется ее аддитивностью, т.е. λ_c системы равно сумме λ_i элементов системы, а также тем, что через интенсивность отказов можно определить все остальные показатели надежности.

Для изделия, в котором имеют место все три вида отказов, интенсивность отказов равна

$$\lambda(t) = \lambda_c(t) + \lambda_в(t) + \lambda_п(t),$$

где $\lambda_c(t) = \dfrac{\alpha_c(t)}{P(t)}$ – интенсивность сбоев;

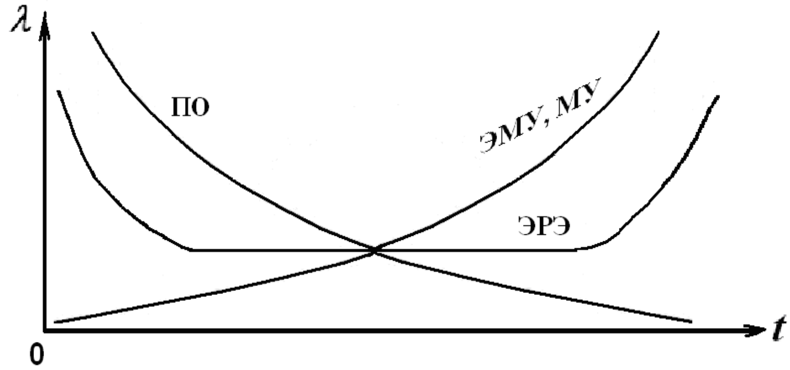


Рис. 1.5

$$\lambda_{в}(t) = \frac{\alpha_{в}(t)}{P(t)}$$ – интенсивность внезапных отказов;

$$\lambda_{п}(t) = \frac{\alpha_{п}(t)}{P(t)}$$ – интенсивность постепенных отказов;

$\alpha_с(t)$, $\alpha_в(t)$, $\alpha_п(t)$ – частоты отказов соответственно для сбоев, внезапных и постепенных отказов.

1.1.4 Средняя наработка до отказа (или среднее время безотказной работы) – $T_о$ – математическое ожидание наработки до первого отказа.

Этот показатель характеризует надежность однотипных изделий до их первого отказа, после которого они не восстанавливаются.

Средняя наработка до отказа определяется из испытаний по статистической формуле

$$T_o = \frac{1}{N_o}\sum_{i=1}^{N_o} t_i,\ ч,$$

где t_i – время безотказной работы i-го изделия.

Согласно определению $T_о$ как математического ожидания, можно записать

$$T_o = \int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot f(t)\cdot dt = \int_0^{\infty} t\cdot f(t)\cdot dt = -\int_0^{\infty} t\cdot \frac{dP(t)}{dt}\cdot dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$T_o = -t \cdot P(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t) \cdot dt,$$

где первое слагаемое равно нулю, т.к. P(0) = 1, P(∞) = 0.

Окончательно

$$T_o = \int_0^\infty P(t) \cdot dt.$$

Это выражение справедливо при любом законе распределения времени исправной работы. Таким образом, средняя наработка до отказа определяется площадью, ограниченной осями координат и кривой вероятности безотказной работы.

Относительно T_o можно отметить следующее (рис. 1.6).

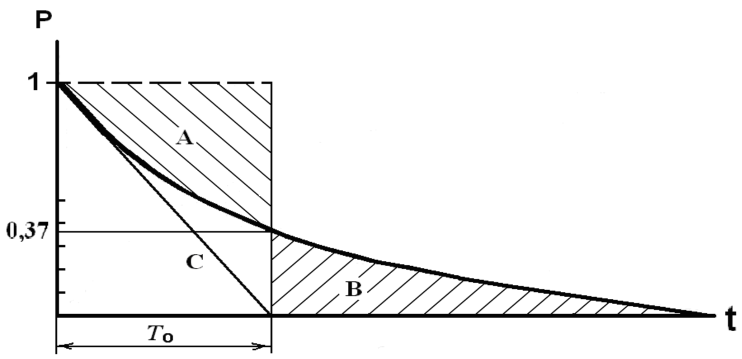


Рис. 1.6

Линия С является касательной к экспоненте в точке ее пересечения с осью ординат. Эта касательная пересекает ось абсцисс в точке T_o, перпендикуляр из которой отсекает экспоненту на уровне P = 0,37. Площадь $S_A = S_B$. Прямоугольник, построенный на отрезке T_o, имеет площадь, равную площади, ограниченной кривой и осями координат $T_o = \int_0^\infty P(t) \cdot dt$, т.к. одна сторона прямоугольника равна 1, то вторая равна T_o.

За время T_o отказывает 63% изделий: так как

$$P = 0{,}37 = \frac{N_o - N_{отк}}{N_o},$$

то $N_{отк} = N_o - 0{,}37N_o = 0{,}63\ N_o$.

В случае, если λ =const, т.е. на основном участке работы справедлив экспоненциальный закон надежности, то

$$T_o = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{\lambda},\ ч.\ \text{ и }\ P(t) = e^{-t/T_o}.$$

При $T_o = t$ имеем $P(t) = e^{-1} = 0{,}37$, т.е. время работы должно быть $t << T_o$.

1.1.5 Средняя наработка на отказ (или просто наработка на отказ) – $T_{ср}$ – отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию числа отказов в течение этой наработки.

Наработка на отказ определяется по статистической формуле

$$T_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n},$$

где t_i – время работы между (i – 1)-м и i-м отказами изделия;

n – число отказов за время испытаний или эксплуатации.

Этот показатель применяется для восстанавливаемых изделий, которые после отказа восстанавливаются и продолжают работать.

Если $T_{ср}$ определяется из испытаний группы однородных изделий, то количество изделий N_o остается постоянным все время испытаний, так как после отказа они восстанавливаются.

В случае, если справедлив экспоненциальный закон надежности, т.е. имеет место простейший поток отказов, то

$$T_{cp} = T_o = \frac{1}{\lambda},\ ч.\ \text{ и }\ P(t) = e^{-t/T_o} = e^{-t/T_{cp}}.$$

1.1.6 Параметр потока отказов (средняя частота отказов) – ω(t) – отношение математического ожидания числа отказов восстанавливаемого объекта за достаточно малую его наработку к значению этой наработки.

Параметр потока отказов определяется по статистической формуле

$$\omega(t) = \frac{n(\Delta t)}{\Delta t \cdot N_o},\ 1/ч,$$

где n(Δt) – количество отказавших изделий в интервале времени Δt;

N_o – количество изделий, поставленных на испытание, которое остается постоянным в процессе испытаний, так как отказавшие изделия восстанавливаются или заменяются новыми.

Следует заметить, что при справедливости экспоненциального закона надежности для изделий, т.е. когда поток отказов простейший,

$$\lambda(t) = \omega(t) = \lambda.$$

Это соотношение позволяет оценивать интенсивность отказов изделий по результатам эксплуатации и, в частности, интенсивности отказов электрорадиоэлементов.

Таким образом для восстанавливаемых изделий можно применять λ вместо ω.

1.2. Показатели надежности неремонтируемой аппаратуры

1.2.1 Среднее время восстановления – $T_{в\ ср}$ – математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния объекта после отказа.

Этот показатель используется при расчетах надежности восстанавливаемых в процессе эксплуатации изделий.

Статистическая формула для определения среднего времени восстановления

$$T_{в\ ср} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i,\ ч.,$$

где τ_i – время, затрачиваемое на обнаружение и устранение одной неисправности;

n – количество восстановлений изделия, равное числу отказов.

1.2.2 Интенсивность восстановления – μ(t) – условная плотность вероятности восстановления работоспособного состояния объекта, определенная для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента восстановление не было завершено.

Интенсивность восстановления определяется по статистической формуле

$$\mu(t) = \frac{n_в(\Delta t)}{\Delta t \cdot N_{нв}(t)},\ \frac{1}{ч},$$

где $n_в(\Delta t)$ – количество восстановленных изделий в интервале времени

$$\left(t-\Delta t/_2,\ t+\Delta t/_2\right);$$

$N_{н\ в}(t)$– количество изделий, не восстановленных к моменту t.

При экспоненциальном законе $\mu=\dfrac{1}{T_{в\,ср}}$.

1.2.3 Вероятность восстановления – $P_{вос}(t)$ – вероятность того, что время восстановления работоспособного состояния объекта не превышает заданного значения

$$P_{вос}(t) = вер(T_{в\ ср} < \tau_з).$$

Вероятность восстановления есть функция распределения времени восстановления, т.е.

$$0 \le P_{вос}(t) \le 1,\ \ P_{вос}(0) = 0,\ \ P_{вос}(\infty) = 1.$$

При экспоненциальном законе

$$P_{вос}(t)=1-e^{-\mu\cdot t}=1-e^{-t/T_{в\,ср}}.$$

Среднее время восстановления определяется по формуле

$$T_{в\,ср}=\int_0^\infty\left[1-P_{вос}(t)\right]\cdot dt.$$

1.2.4 Функция готовности – $К_г(t)$ – вероятность того, что в момент времени t изделие окажется в работоспособном состоянии. Она учитывает свойства безотказности и ремонтопригодности.

$$К_г(t) = k_г + k_п e^{-(\lambda+\mu)\cdot t},$$

где $k_г$ – коэффициент готовности;

$k_п$ – коэффициент простоя.

Функция готовности определяется по статистической формуле

$$K_Г(t)=\frac{N_P(t)}{N_O},$$

где $N_р(t)$ – количество изделий, оказавшихся в работоспособном состоянии

в момент времени t;

$N_о$ – общее число изделий.

Функция готовности при t = 0 равна 1, а при $t \to \infty$ равна $k_г$ (рис. 1.7).

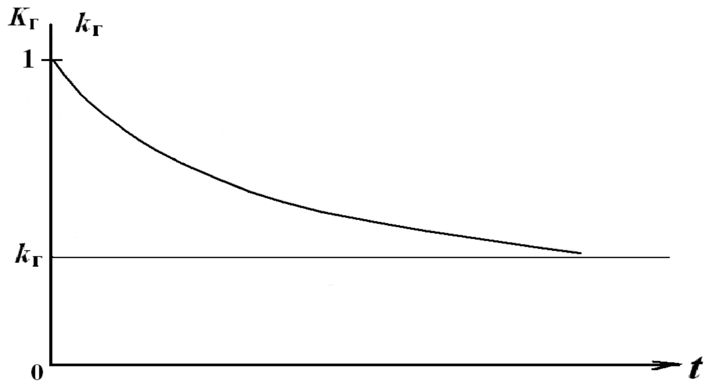


Рис. 1.7

1.2.5 Коэффициент готовности – $k_г$ – вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается.

$$\lim_{t \to \infty} K_Г(t) = k_Г.$$

$$k_Г = \frac{T_{CP}}{T_{CP} + T_{BCP}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Соответственно коэффициент простоя равен

$$k_П = 1 - k_Г = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

1.2.6 Коэффициент оперативной готовности – $К_{ог}(t)$ – вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается, и, начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного интервала времени.

$$К_{ог}(t_з) = k_г \cdot P(t_з),$$

где $t_з$ – оперативное время (интервал), в течение которого изделие должно проработать безотказно.

1.2.7 Коэффициент технического использования – $К_{ти}(t)$ – отношение математического ожидания суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к математическому ожиданию суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии и простоев, обусловленных техническим обслуживанием и ремонтом за тот же период.

С учетом стационарности наблюдаемого случайного процесса

$$K_{ТИ}(t) = \frac{T_{СР}}{T_{СР} + T_{ВСР} + T_{ТО}} = \frac{T_{СР}}{\left(T_{СР} + T_{ВСР}\right)\left(1 + \dfrac{T_{ТО}}{T_{СР} + T_{ВСР}}\right)},$$

где $Т_{то}$ – средняя продолжительность технического обслуживания (проведения профилактических мероприятий).

Или в более удобном виде $K_{ТИ} = \dfrac{k_{Г}}{1 + k_{П}}$, где коэффициент простоя

$$k_{П} = \frac{T_{ТО}}{T_{СР} + T_{ВСР}}$$

1.3. Аудиторные задания

1. Сколько различных слов длиной восемь букв можно составить в

алфавите $\{0, 1\}$.

1.4. Самостоятельная работа

1. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных

костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

1.5. Контрольные вопросы

1. Что такое вероятность безотказной работы (ВБР) и как она определяется?

2. Что такое частота отказов и как она определяется?

3. Что такое интенсивность отказов и как она определяется?

4. Что такое средняя наработка до отказа и как она определяется?

5. Что такое наработка на отказ и как она определяется?

6. Что такое средняя частота отказов и как она определяется?

7. Что такое среднее время восстановления и как оно определяется?

8. Что такое интенсивность восстановления и как она определяется?

9. Что такое вероятность восстановления и как она определяется?

10. Что такое функция готовности и как она определяется?

11. Что такое коэффициент готовности и как он определяется?

12. Что такое коэффициент оперативной готовности и как он определяется?

13. Что такое коэффициент технического использования и как он определяется?

Тема 2. Расчет надежности нерезервированных устройств

Цель занятия — изучение методик оценки надежности для нерезервированных устройств, а также методов оценки надежности устройств на этапе проектирования.

2.1. Расчет надежности нерезервированной аппаратуры

Основное соединение ЭРН такое, при котором отказ любого элемента приводит к отказу всей системы (рис. 2.1).

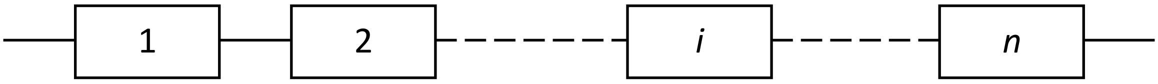


Рис. 2.1

При этом $R_c = \bigcap\limits_{i=1}^{n} R_i$, где R_c – событие, состоящее в безотказной работе системы; R_i – событие, состоящее в безотказной работе элемента; ∩ – логическое «и».

Для основного соединения вероятность отказа

$$Q_c(t) \approx \sum_{i=1}^{n} q_i(t),$$

где $q_i(t)$ – вероятность отказа i–го элемента.

Резервное соединение ЭРН такое, при котором система отказывает только после отказа всех ЭРН (рис. 2.2).

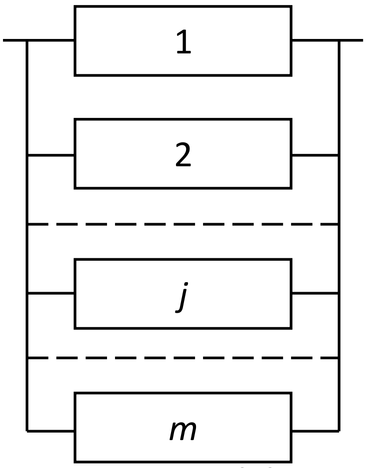


Рис. 2.2

При этом $R_c = \bigcup\limits_{j=1}^{m} R_j$, где U – логическое «или». Для резервного соединения вероятность отказа $Q_c(t) = \prod\limits_{j=1}^{m} q_i(t)$.

Для расчета надежности системы используется теорема умножения вероятностей: вероятность безотказной работы (ВБР) системы равна произведению ВБР элементов

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t).$$

Полагая $P_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(t)\cdot dt}$, имеем

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(t)\cdot dt} = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\cdot dt} = e^{-\int_0^t \lambda_c(t)\cdot dt},$$

где $\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)$ – интенсивность отказов системы;

$\lambda_i(t)$ – интенсивность отказов i-го ЭРН.

Для периода нормальной эксплуатации (2-й участок) справедлив экспоненциальный закон, при котором

$$\lambda_i(t) = \lambda_i = \mathrm{const} \quad \text{и} \quad P_i(t) = e^{-\lambda_i \cdot t}.$$

Тогда

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i \cdot t} = e^{-t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = e^{-\lambda_c \cdot t},$$

где $\lambda_c = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

Этот результат подтверждается тем обстоятельством, что поток отказов системы, состоящей из большого числа элементов, каждый из которых имеет высокую степень безотказности, т.е. отказывает редко, представляет сумму большого числа редких потоков отказов элементов. Если ВБР каждого элемента подчиняется экспоненциальному закону распределения, то поток отказов системы, как суммы простейших потоков, также является простейшим и имеет суммарную интенсивность $\lambda_c = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. При этом должно выполняться условие, что доля каждого элемента в формировании общего потока отказов мала.

Из полученного выражения следует, что при основном соединении элементов нельзя получить высокой надежности системы даже при высокой надежности элементов, т.к. ВБР элемента меньше единицы. Поэтому, чем больше элементов в системе, тем ниже ее надежность. Она получается меньше надежности самого ненадежного элемента.

Если все n элементов в системе равнонадежны, то

$$\lambda_c = n \cdot \lambda \quad \text{и} \quad T_o = \frac{T_{oi}}{n}.$$

Т.е. интенсивность отказа системы в n раз больше, а средняя наработка до первого отказа в n раз меньше, чем у отдельного элемента.

Как правило, системы состоят из k-групп элементов. В каждой группе N_i элементов. Тогда

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{k} N_i \cdot \lambda_i.$$

2.2. Расчет надежности аппаратуры на этапе проектирования

2.2.1 Прикидочный расчет надежности проводится на этапе технического предложения (первичного проектирования), когда изделие еще не разработано, но известна его приблизительная сложность (количество элементов – n). При этом принимается одинаковая интенсивность отказов для всех элементов – $\lambda_{ср}$.

Тогда $\lambda_c = n \cdot \lambda_{cp}$, $P_c(t) = e^{-n \cdot \lambda_{cp} \cdot t}$.

Полученное значение ВБР сравнивается с заданным в ТЗ и соответственно принимаются или нет меры по повышению надежности системы.

2.2.2 Ориентировочный расчет надежности проводится на этапе эскизного проектирования, когда известна, ориентировочно, электрическая схема системы и, следовательно, количество элементов N_i каждого типа.

Ориентировочный расчет надежности по среднегрупповым интенсивностям отказов элементов.

Исходные данные для расчета: k_i, λ_{icp}, N_i.

Тогда $\lambda_c = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{icp} \cdot N_i$, $P_c(t) = e^{-\lambda_c \cdot t}$, $T = \frac{1}{\lambda_c}$.

Иногда вместо λ_{icp} используют минимальное и максимальное значения интенсивностей отказов элементов $\lambda_{iмин}$ (для самых легких условий работы) и

$\lambda_{iмакс}$ (для самых тяжелых условий работы). Это позволяет определить интервал, в котором при заданном времени работы $t_з$ будет находиться ВБР системы:

$$\lambda_{смин} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{iмин} \cdot N_i; \; P_{смакс}(t) = e^{-\lambda_{смин} \cdot t};$$

$$\lambda_{смакс} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{iмакс} \cdot N_i; \; P_{смин}(t) = e^{-\lambda_{смакс} \cdot t}.$$

Построив график при изменении t, находим интервал для заданного $t_з$ (рис. 2.3), в котором находится ВБР проектируемой системы. Полученный результат сравнивается с заданной ВБР в ТЗ и делаются соответствующие выводы.

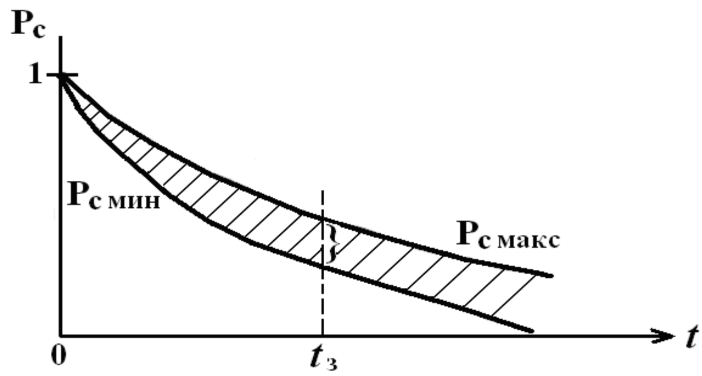


Рис. 2.3

2.2.3 Утонченный расчет надежности проводится на этапе технического проектирования, когда система полностью спроектирована и имеются все предварительные данные для проведения такого расчета: известны токи, напряжения и мощности для всех элементов схемы и тепловые нагрузки на них, т.е. должна быть отработана конструкция системы.

Таким образом, для окончательного расчета должны быть известны:

k – количество групп элементов;

N_i – количество элементов в i-й группе;

$k_{нi}$ – коэффициенты нагрузки для элементов i-й группы;

$t_{раб\,i}$ – рабочая температура для элементов i-й группы.

Интенсивность отказов ЭРЭ i-й группы в зависимости от условий работы определяется по формуле

$$\lambda_i = \lambda_{io} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots,$$

где λ_{io} – интенсивность отказов ЭРЭ i-й группы при нормальных условиях работы;

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ – эксплуатационные коэффициенты, которые определяют значение интенсивности отказов в условиях, отличных от нормальных.

Нормальные условия работы:

- окружающая температура +20 ±5° С;
- относительная влажность 65 ±15% при температуре воздуха +20 ±5° С;
- атмосферное давление 750 ±30 мм рт.ст. (100 ±4 кПа);
- коэффициент нагрузки равен единице;
- отсутствуют механические воздействия.

Для сложных элементов (лампы, реле, электродвигатели и др.) используются другие формулы расчета λ_i [28].

В данном расчете используем коэффициент a_1, который определяется коэффициентом нагрузки и рабочей температурой элемента, т.е. $a_1 = f(k_н, t^oC)$. Он выбирается по графикам или таблицам. Тогда

$$\lambda_i = \lambda_{io} \cdot a_{1i}.$$

Расчет проводится путем заполнения таблицы, в которой элементы группируются по типам, коэффициентам нагрузки и рабочим температурам (табл. 2.1).

Таблица 2.1.

Группы элемен-тов	Тип элемента	N_i	λ_{io}	Условия эксплуатации		a_{1i}	λ_i	$N_i \cdot \lambda_i$
				$k_{нi}$	$t_{раб\ i}$			
1	МЛТ-1,0	5	--	0,8	60	--	--	--
2	МЛТ-1,0	8	--	0,8	70	--	--	--
3	МЛТ-1,0	3	--	0,6	70	--	--	--
.	.			.	.			

. . k	. . .			. .	. .			

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{k} N_i \cdot \lambda_i .$$

Окончательный расчет надежности проводится после изготовления опытного образца и его испытания. Этот расчет проводится также, как и уточненный, по его данным, полученным из испытаний, например, рабочие температуры для элементов в реальной конструкции. Могут добавляться и другие воздействующие факторы: влажность, механика и пр.

2.3 Расчет надежности восстанавливаемой аппаратуры ответственного назначения

Большая часть ЭА во время эксплуатации восстанавливается обслуживающим персоналом. Поэтому такая аппаратура характеризуется не только безотказностью, но и ремонтопригодностью. При наличии таких свойств она может выполнить поставленную задачу в следующих двух ситуациях:

- аппаратура готова к работе и после включения в момент времени $t_х$ проработает безотказно оперативное время $t_з$, необходимое для выполнения поставленной задачи;
- аппаратура не готова к работе в требуемый момент времени, но она может быть восстановлена за время $\tau < t_з$ и в оставшееся время $(t_з - \tau)$ проработает без отказа и выполнит поставленную задачу.

Вероятность выполнения поставленной задачи в этом случае простейших потоков отказов и восстановлений может быть определена по формуле полной вероятности сложного события (пренебрегая членами высших порядков малости)

$$P_з(t_з) = K_Г(t_х) \cdot P(t_х, t_з) + \left[1 - K_Г(t_х)\right] \cdot P_{вос}(\tau) \cdot P(t_з - \tau),$$

где $К_Г(t_х)$ – функция готовности;

$P(t_х, t_з)$ – условная ВБР за оперативное время $t_з$ при условии, что в момент включения $t_х$ аппаратура была работоспособной;

$[1 - К_Г(t_х)]$ – вероятность неисправного состояния (неготовности) аппаратуры к началу применения в момент времени $t_х$;

$P_{вос}(\tau)$ – вероятность восстановления аппаратуры за время $\tau < t_з$;

$P(t_з - \tau)$ – условная ВБР аппаратуры за оставшееся время,

еще достаточное для выполнения задачи.

Полученное выражение для вероятности выполнения задачи $P_з(t_з)$ может быть упрощено по следующим соображениям. При достаточно большом времени t_x имеем

$$\underset{t_x \to \infty}{K_Г(t_x)} \approx k_Г = \frac{T_{ср}}{T_{ср} + T_{вср}}.$$

Для ответственной аппаратуры $T_{ср} \gg T_{в\,ср}$, т.е. $k_Г \approx 1$ и $(1 - K_Г) \approx 0$.

Тогда, пренебрегая вторым слагаемым в исходном уравнении, получаем выражение для определения коэффициента оперативной готовности $K_{ог}(t_з)$ при любом законе распределения времени исправной работы

$$P_з(t_з) = k_Г \cdot P(t_x, t_з) = K_{ОГ}(t_з).$$

Если распределение времени исправной работы аппаратуры подчиняется экспоненциальному закону (λ = const), то условная ВБР, как указывалось ранее, не зависит от момента времени начала выполнения задачи t_x, а зависит от длины промежутка времени $t_з$, т.е. $P(t_x, t_з) = e^{-\lambda_c \cdot t_з} = P(t_з)$.

Окончательно имеем

$$K_{ОГ}(t_з) = k_Г \cdot P(t_з) = \frac{T_{ср}}{T_{ср} + T_{вср}} \cdot e^{-\lambda_c \cdot t_з}.$$

В этом выражении известны λ_c и $T_{ср}$. Среднее время восстановления находится следующим образом:

$$T_{вср} = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \overline{\tau_i},$$

где $p_i = \dfrac{N_i \cdot \lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} N_i \cdot \lambda_i} = \dfrac{1}{\lambda_c} \cdot N_i \cdot \lambda_i$ – вероятность того, что возникшая

неисправность относится к элементам i-го типа (группы);

$\overline{\tau_i}$ – среднее время нахождения и устранения одной неисправности

у элементов i-го типа (группы);

k – количество типов (групп) элементов;

N_i и λ_i – количество и интенсивность отказов элементов i-го

типа (группы);

$p_i \cdot \overline{\tau_i}$ – доля среднего времени восстановления аппаратуры,

связанная с отказами элементов i-го типа (группы).

Чем больше интенсивность отказов элементов i-го типа (группы) $N_i \cdot \lambda_i$, тем больше вероятность того, что отказ произойдет у элементов этого типа (группы).

Заменяя в формуле для $K_{ог}(t_з)$ среднее время восстановления и учитывая, что $T_{ср} = \frac{1}{\lambda_c}$, получим

$$K_{ОГ}(t_з) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{k} N_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\tau_i}} \cdot e^{-\lambda_c \cdot t_з}.$$

Расчет ведется с использованием таблицы для окончательного расчета надежности (табл. 2.1) с добавлением к ней двух столбцов: для $\overline{\tau_i}$ и $N_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\tau_i}$ (табл. 2.2).

Таблица 2.2.

Группы элемен-тов	- - - - - - - - - - - - - - - - -	$N_i \cdot \lambda_i$	$\overline{\tau_i}$	$N_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\tau_i}$
1 2 . . . k				
		$\lambda_c = \sum_{i=1}^{k} N_i \cdot \lambda_i$		$\sum_{i=1}^{k} N_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\tau_i}$

Значения среднего времени восстановления элементов i-го типа (группы) находятся по таблицам, в которых указывается среднее время отыскания неисправности $\bar{t}_{от}$ и среднее время устранения неисправности $\bar{t}_{уст}$ для различных типов элементов. Тогда

$$\overline{\tau_i} = \bar{t}_{отi} + \bar{t}_{устi}.$$

Приведенный расчет, в части определения коэффициента готовности, справедлив для случая непрерывной эксплуатации аппаратуры. В случае, если аппаратура хранится перед использованием, то коэффициент готовности определяется по формуле

$$k_Г = \frac{T_{хрср}}{T_{пп} + T_{проф} + T_{вср}} \left(1 - e^{-\frac{T_{пп}}{T_{хрср}}} \right),$$

где $T_{хрср} = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} N_i \cdot \lambda_{хрi}}$ – среднее время между отказами аппаратуры при хранении;

$\lambda_{хрi}$ – интенсивность отказов элемента i-го типа (группы) при хранении;

$T_{пп}$ – период между двумя последовательными профилактическими проверками;

$T_{проф}$ – длительность профилактических работ;

$T_{в\ ср}$ – среднее время восстановления.

2.4 Расчет надежности восстанавливаемой аппаратуры не ответственного назначения

Это аппаратура, предназначенная для длительной эксплуатации, во время которой она может ремонтироваться и к которой не предъявляется требование безотказности в течение оперативного времени $t_з$. К такой аппаратуре относится измерительная аппаратура, бытовая и т.п.

Надежность аппаратуры определяется функцией готовности, а при достаточно большом времени t – коэффициентом готовности:

$$P = k_Г = \frac{T_{ср}}{T_{ср} + T_{вср}} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{k} N_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\tau_i}}.$$

Чем больше $T_{ср}$ относительно $T_{в\ ср}$, тем больше $k_г$ и тем выше надежность такой аппаратуры.

2.5 Расчет надежности нерезервированной восстанавливаемой системы по графу переходов

Граф переходов представим в следующем виде (рис. 2.4).

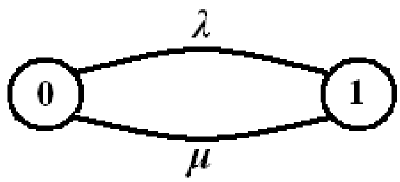


Рис. 2.4

В графе: интенсивность перехода λ_{01} равна интенсивности отказов системы λ: ($\lambda_{01} = \lambda$), а интенсивность перехода μ_{10} равна интенсивности восстановления системы μ: ($\mu_{10} = \mu$); 0 – основное (рабочее) состояние, 1 – нерабочее состояние.

По графу переходов, используя правило, запишем дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda \cdot P_0(t) - \mu \cdot P_1(t). \end{cases}$$

Решаем систему с применением преобразования Лапласа (см. 4.2).

$$\begin{cases} z \cdot P_0(z) - P_0(t=0) = -\lambda \cdot P_0(z) + \mu \cdot P_1(z) \\ z \cdot P_1(z) - P_1(t=0) = \lambda \cdot P_0(z) - \mu \cdot P_1(z). \end{cases}$$

Так как $P_0(t=0) = 1$ и $P_1(t=0) = 0$, имеем

$$\begin{cases} -1 = -z \cdot P_0(z) - \lambda \cdot P_0(z) + \mu \cdot P_1(z) \\ 0 = \lambda \cdot P_0(z) - z \cdot P_1(z) - \mu \cdot P_1(z). \end{cases}$$

Запишем эту систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} (z+\lambda)P_0(z) - \mu \cdot P_1(z) = 1 \\ \lambda \cdot P_0(z) - (z+\mu) \cdot P_1(z) = 0. \end{cases}$$

Полученную систему решаем по правилу Крамера:

$$P_i(z) = \frac{D_i}{D},$$

где D – определитель, элементами которого являются коэффициенты

при $P_i(z)$;

D_i – определитель, который образуется из определителя D путем

замены i-го столбца коэффициентами правой части системы

уравнений.

$$D = \begin{vmatrix} z+\lambda & -\mu \\ \lambda & -(z+\mu) \end{vmatrix}; \quad D_0 = \begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & -(z+\mu) \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} z+\lambda & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$P_0(z) = \frac{D_0}{D} = \frac{-(z+\mu)}{-(z+\lambda)(z+\mu)+\lambda\cdot\mu} = \frac{z+\mu}{z(z+\lambda+\mu)};$$

$$P_1(z) = \frac{D_1}{D} = \frac{\lambda}{z(z+\lambda+\mu)}.$$

Отсюда, умножая числитель и знаменатель на (λ + μ) для приведения к табличной форме, получаем

$$P_0(z) = \frac{(z+\mu)(\lambda+\mu)}{z(z+\lambda+\mu)(\lambda+\mu)} = \frac{z\cdot\lambda+\mu\cdot\lambda+z\cdot\mu+\mu^2}{z(z+\lambda+\mu)(\lambda+\mu)} = \frac{\mu(z+\lambda+\mu)}{z(z+\lambda+\mu)(\lambda+\mu)} +$$
$$+\frac{z\cdot\lambda}{z(z+\lambda+\mu)(\lambda+\mu)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{z+\lambda+\mu}.$$

Используя обратное преобразование Лапласа для $\frac{1}{z}$ и $\frac{1}{z+\lambda+\mu}$ получаем вероятность основного состояния системы:

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} = K_Г(t),$$

т.е. вероятность основного состояния есть функция готовности, характеризующая сочетание свойств безотказности и ремонтопригодности. Постоянная часть функции готовности есть коэффициент готовности

$$k_Г = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{T_{ср}}{T_{ср}+T_{ср}}.$$

В убывающей со временем части функции готовности коэффициент $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=k_П$ – коэффициент простоя.

Решая $P_1(z)$, определим вероятность нахождения системы во втором (не рабочем) состоянии $P_1(t)$, которая представляет собой функцию простоя $К_П(t)$. Определим функцию простоя из соотношения $P_0(t) + P_1(t) = 1$:

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) = 1 - К_Г(t) =$$

$$= 1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right]=K_П(t).$$

Рассмотрим установившийся (стационарный) режим. Исследования характеристик надежности, формируемых под воздействием потоков отказов и восстановлений, позволяют сделать вывод о том, что при существующих на практике соотношениях λ и μ наступает сравнительно быстро период установившегося режима, при котором вероятности состояний системы становятся постоянными величинами $P_i(t) = P_i = const$ и, следовательно $dP_i(t)/dt = 0$ и дифференциальные уравнения становятся алгебраическими.

Тогда по графу переходов составляем систему алгебраических уравнений, для решения которой в данном случае следует добавить третье очевидное уравнение $P_0 + P_1 = 1$:

$$\begin{cases} 0=-\lambda\cdot P_0+\mu\cdot P_1 \\ 0=\lambda\cdot P_0-\mu\cdot P_1 \\ 1=P_0+P_1 \quad . \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $P_1=\frac{\lambda}{\mu}\cdot P_0$ и подставляем в 3-е: $P_0+\frac{\lambda}{\mu}\cdot P_0=1.$

Откуда $P_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=k_Г$ и $P_1=1-P_0=1-k_Г=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=k_П$.

Таким образом, при стационарном режиме в системе вместо функций готовности и простоя используются коэффициенты готовности и простоя в качестве вероятностей состояний.

2.6 Определение среднего времени работы системы до отказа

Известно, что средняя наработка до отказа равна $T=\int_0^\infty P(t)\cdot dt$.

Интегральное преобразование Лапласа, связывающего функцию-оригинал P(t) действительного переменного $t(0 \le t \le \infty)$ с функцией-изображением P(z) комплексного переменного z имеет вид

$$P(z) = \int_0^{\infty} P(t) \cdot e^{-z \cdot t} \cdot dt .$$

Если принять z = 0, то T = P(z).

Используя 1-е уравнение системы после применения преобразования Лапласа (см. 5.1),

$$-1 = -z \cdot P_0(z) - \lambda \cdot P_0(z) + \mu \cdot P_1(z),$$

полагая z = 0, и заменяя $P_i(z)$ на T_i, получим

$$-1 = -\lambda \cdot T_0 + \mu \cdot T_1.$$

Принимая $T_1 = 0$, т.к. необходимо найти время работы до отказа, т.е. время нахождения в основном (рабочем) состоянии T_0, находим $T_0 = \frac{1}{\lambda}$.

2.5. Аудиторные задания

1. Сколько различных слов длиной восемь букв можно составить в

алфавите {0, 1}.

2.6. Самостоятельная работа

1. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных

костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

2.7. Контрольные вопросы

1. Какие типы соединения элементов расчета надежности существуют и в чем их отличие от аналогичных по структуре типов электрического соединения?

2. Каким образом осуществляется расчет надежности радиоэлектронной аппаратуры при основном соединении?

3. Каким образом осуществляется расчет надежности радиоэлектронной аппаратуры при резервном соединении?

4. Какие типы расчета надежности в зависимости от этапов проектирования радиоэлектронной аппаратуры существуют и в чем их принципиальные отличия?

5. Как проводится прикидочный расчет надежности при проектировании радиоэлектронной аппаратуры?

6. Как проводится ориентировочный расчет надежности при проектировании радиоэлектронной аппаратуры?

7. Как проводится уточненный расчет надежности при проектировании радиоэлектронной аппаратуры?

8. В чем отличие уточненного расчета надежности от окончательного?

9. Что такое аппаратура ответственного назначения и каким образом проводится расчет её надежности?

10. В чем отличие при проведении расчета восстанавливаемой аппаратуры ответственного назначения от окончательного расчета надежности для невосстанавливаемой аппаратуры?

11. Как проводится расчет надежности для аппаратуры не ответственного назначения?

12. Как рассчитывается вероятность безотказной работы ремонтируемой аппаратуры по графу переходов?

13. Как рассчитывается среднее время безотказной работы ремонтируемой аппаратуры по графу переходов?

Тема 3. Расчет надежности резервированных устройств

Цель занятия — изучение методик для оценки надежности устройств при применении различных подходов к резервированию

3.1. Исходная схема для расчета надежности невосстанавливаемых систем с ПУ–I

Под исходной понимается схема, на основании которой проводится расчет надежности систем при общем и раздельном резервировании. На рис. 3.1 приведены блок-схема резервируемого участка (а) и структурная схема расчета его надежности (б). Резервирование с целой кратностью.

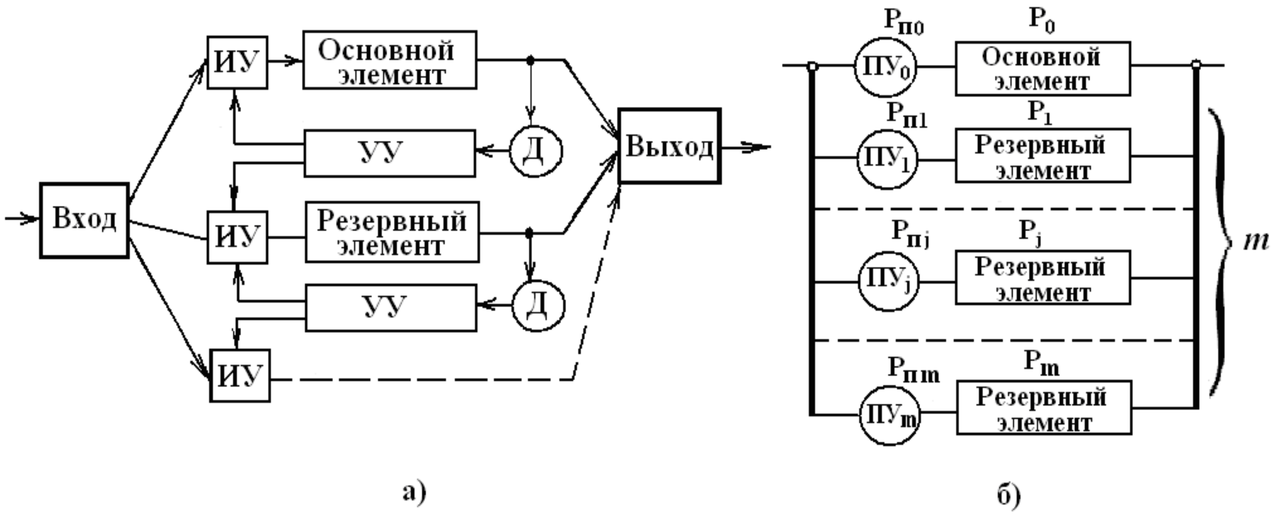


Рис. 3.1

Проведем расчет на основе теоремы умножения вероятностей, но теперь уже для вероятностей отказов: вероятность отказа резервированного участка $Q_{уч}(t)$ равна произведению вероятностей отказов цепей $Q_ц(t)$.

$$Q^I_{уч}(t) = \prod_{j=0}^{m} Q_ц(t);\ P^I_{уч}(t) = 1 - Q^I_{уч}(t) = 1 - \prod_{j=0}^{m}\left[1 - P_ц(t)\right] = 1 - \prod_{j=0}^{m}\left(1 - P_{Пj} \cdot P_j\right).$$

3.2 Исходная схема для расчета надежности невосстанавливаемых систем с ПУ–II

На рис. 3.2 приведены блок-схема резервируемого участка (а) и структурная схема расчета его надежности (б). Резервирование с целой кратностью.

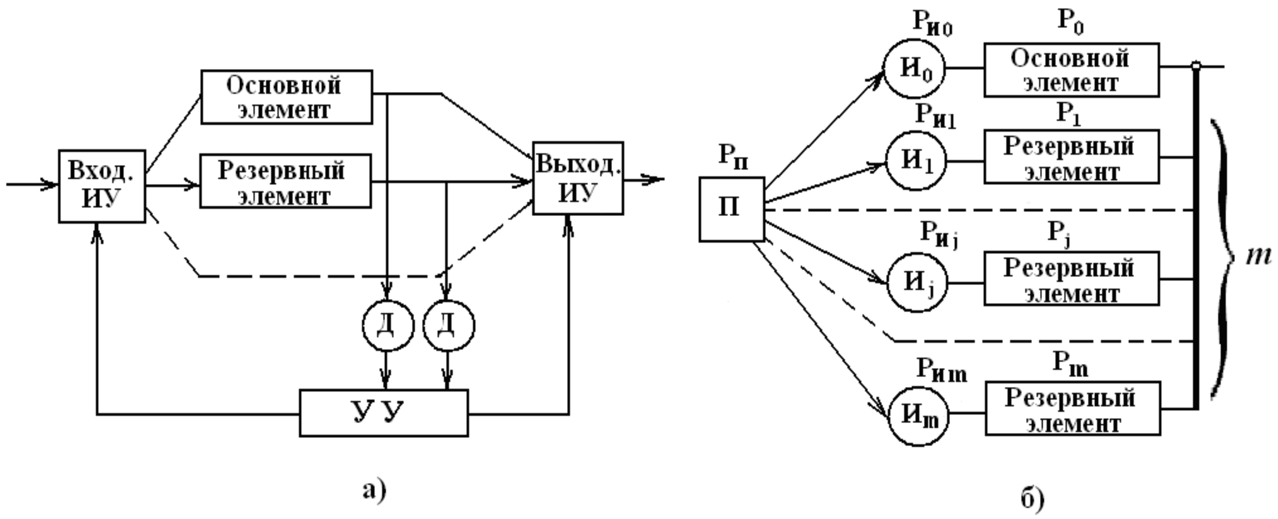


Рис. 3.2

На рис. 3.2,а части ПУ сформированы в виде двух элементов: П-элемент, в который входит УУ и те элементы ИУ, которые влияют на работу всего участка, и элементы И, в которые входят датчики и те элементы ИУ, которые влияют на работу только одной цепи.

ВБР элемента П равна $P_П = P_{УУ} \cdot P'_{вхИУ} \cdot P'_{выхИУ}$.

ВБР элемента И равна $P_{И\,j} = P_Д \cdot P''_{вхИУ} \cdot P''_{выхИУ}$.

Используя теорему умножения вероятностей, получим ВБР резервированного участка с ПУ–II. Можно воспользоваться моделью ПУ-I (рис. 3.1,б), заменив ПУ в каждой цепи на $И_j$. Элемент П имеет основное соединение с участком резервирования.

$$P_{уч}^{II}(t) = P_П \cdot \left[1 - \prod_{j=0}^{m}\left(1 - P_{И\,j} \cdot P_j\right)\right].$$

3.3 Расчет надежности невосстанавливаемых систем с ПУ–I при общем и раздельном резервировании

На рис. 3.3 приведена структурная схема для расчета надежности системы с ПУ–I при общем резервировании с целой кратностью.

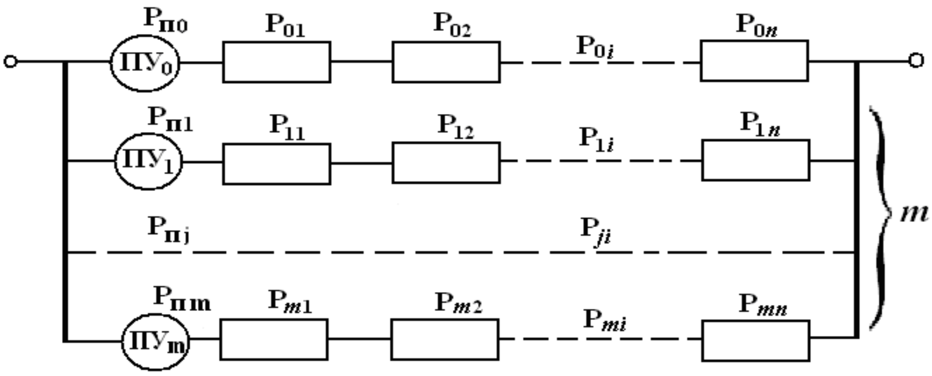


Рис. 3.3

ВБР такой системы определяется на основе исходной схемы, с ПУ–I, каждый элемент которой разворачивается в цепочку элементов:

$$P^{I}_{c\,общ}(t) = 1 - \prod_{j=0}^{m}\left(1 - P_{Пj} \cdot \prod_{i=1}^{n} P_{ji}\right).$$

На рис. 3.4 приведена структурная схема для расчета надежности системы с ПУ–I при раздельном резервировании с целой кратностью.

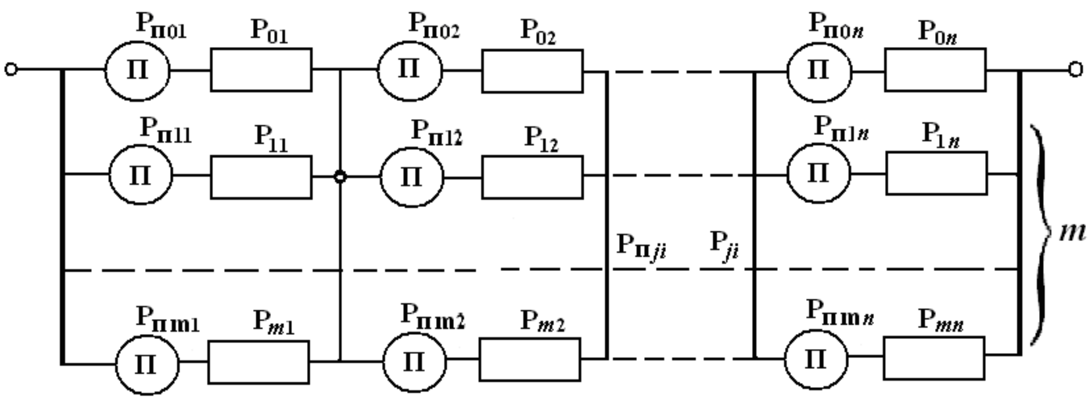


Рис. 3.4

Все участки имеют между собой основное соединение. Поэтому применяем исходную схему n раз.

$$P^{I}_{c\,разд}(t) = \prod_{i=1}^{n} P^{I}_{уч\,i}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - \prod_{j=0}^{m}\left(1 - P_{Пji} \cdot P_{ji}\right)\right].$$

3.4 Расчет надежности невосстанавливаемых систем с ПУ–II при общем и раздельном резервировании

На рис. 3.5 приведена структурная схема для расчета надежности системы с ПУ–II при общем резервировании с целой кратностью.

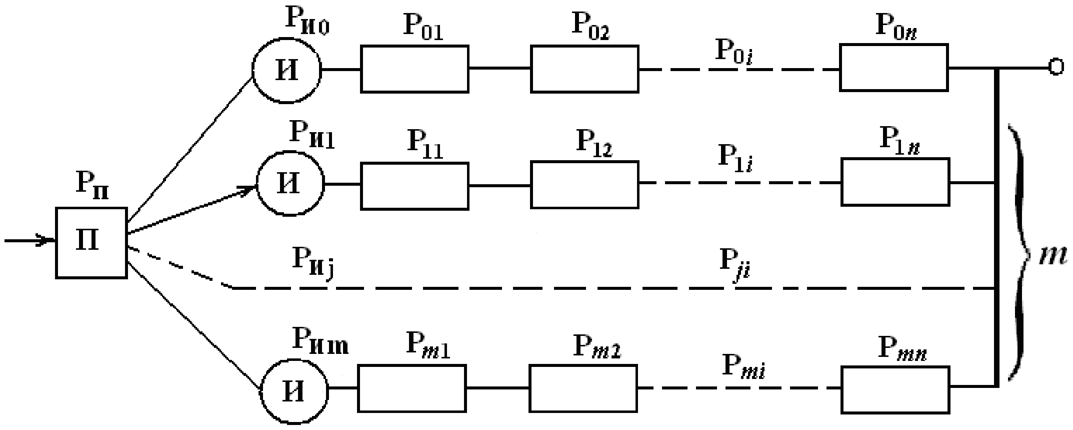


Рис. 3.5

ВБР такой системы определяется на основе исходной схемы с ПУ–II, каждый элемент которой разворачивается в цепочку элементов.

$$P^{II}_{c\ общ}(t) = P_{П} \cdot \left[1 - \prod_{j=0}^{m}\left(1 - P_{Иj} \cdot \prod_{i=1}^{n} P_{ji}\right)\right].$$

На рис. 3.6 приведена структурная схема для расчета надежности системы с ПУ–II при раздельном резервировании с целой кратностью.

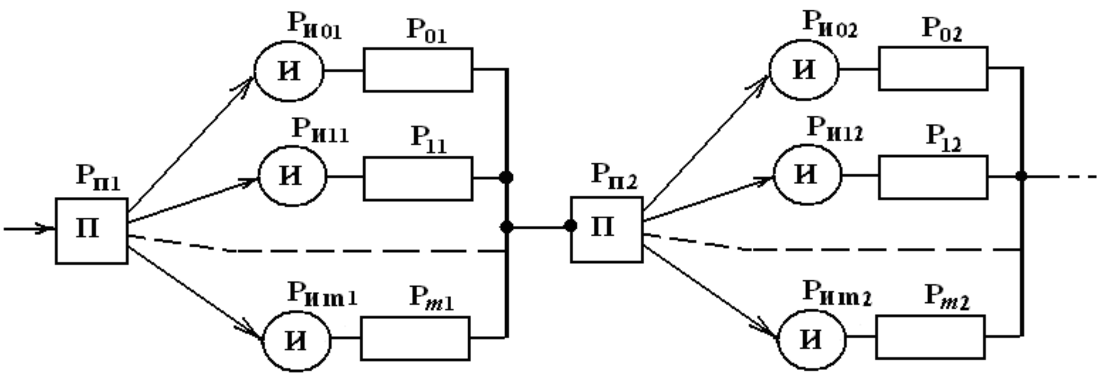


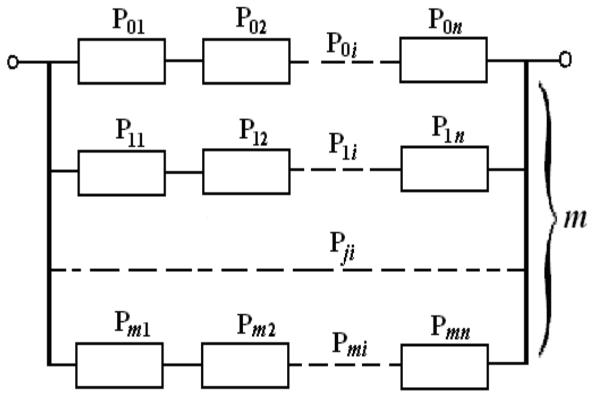
Рис. 3.6

Все участки имеют между собой основное соединение. Поэтому применяем исходную схему n раз.

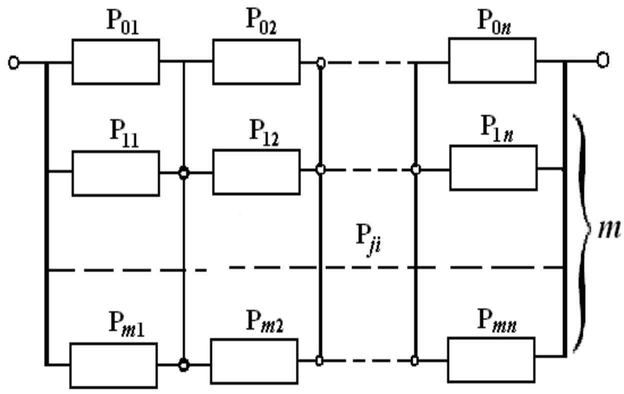
$$P^{II}_{c\ разд}(t) = \prod_{i=1}^{n} P^{II}_{учi}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left\{P_{Пi} \cdot \left[1 - \prod_{j=0}^{m}\left(1 - P_{Иji} \cdot P_{ji}\right)\right]\right\}.$$

3.5 Расчет надежности невосстанавливаемых систем при постоянном общем и раздельном резервировании

На рис. 3.7 приведены структурные схемы для расчета надежности при общем (а) и раздельном (б) постоянном резервировании с целой кратностью.



а)



б)

Рис. 3.7

Расчетные формулы для этих схем можно получить из исходных схем с ПУ–I или ПУ–II, полагая ПУ абсолютно надежными, т.е. принимая $P_П = 1$ и $P_И = 1$.

Для схемы а): $$P_{общ}(t) = 1 - \prod_{j=0}^{m}\left(1 - \prod_{i=1}^{n} P_{ji}\right),$$

для схемы б): $$P_{разд}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - \prod_{j=0}^{m}\left(1 - P_{ji}\right)\right].$$

3.6 Расчет надежности невосстанавливаемой системы при скользящем резервировании

При скользящем резервировании основные и резервные элементы одинаковы. Это резервирование замещением с дробной кратностью

$$m = \frac{\mathrm{M}}{N},$$

где N – количество однотипных основных элементов;

M – количество однотипных с основными резервных элементов.

Такая система откажет, если количество отказавших элементов S будет больше количества резервных элементов, т.е. S > M. Следовательно, система выполняет поставленную задачу до тех пор, пока в ней работает не менее N из N + M элементов.

На рис. 3.8 приведена блок-схема системы со скользящим резервированием (например, радиорелейная линия) а) и структурная схема расчета ее надежности б) или в). Схема в) определила название – скользящее резервирование.

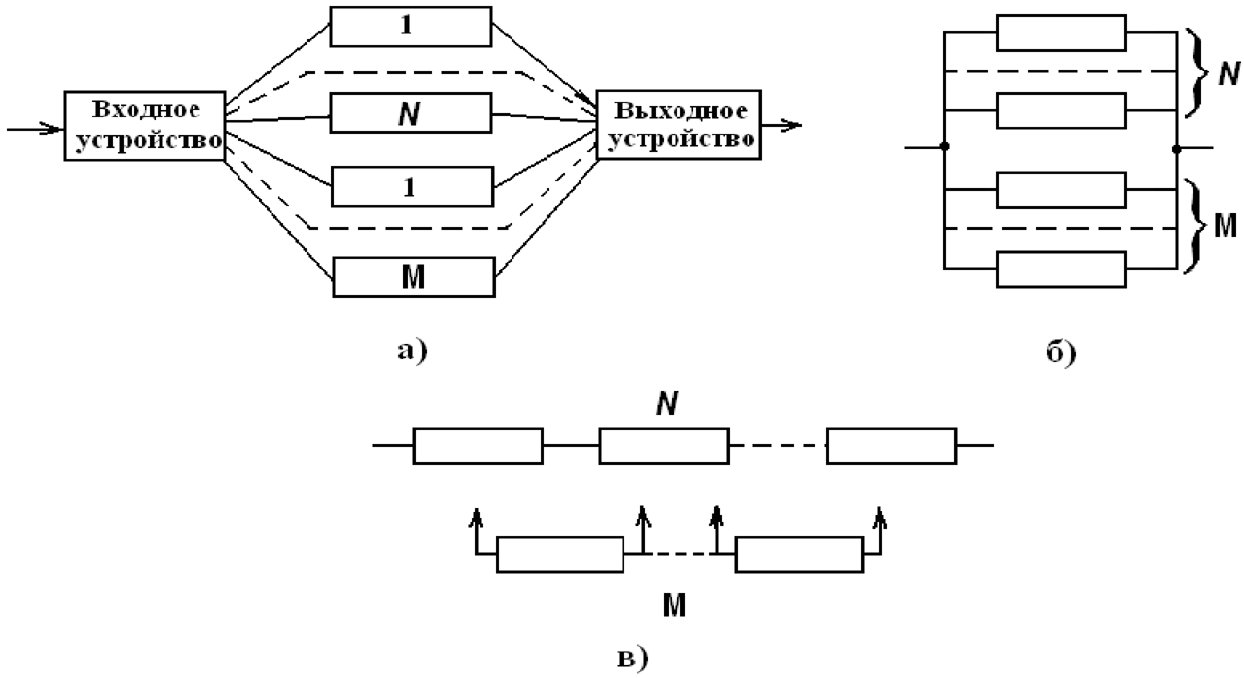


Рис. 3.8

При $P_П = 1$ ВБР системы будет

$$P_{ск}(t) = \sum_{i=0}^{M} p(H_i),$$

где H_i – гипотеза, заключающаяся в том, что система выполняет задачу при отказе ровно i элементов;

$p(H_i)$ – вероятность этой гипотезы;

M – максимальное количество отказавших элементов, не приводящее к отказу системы в целом.

Вероятности гипотез подчиняются биноминальному распределению

$$p(H_i) = C^i_{\text{М}+N} \cdot p^{\text{М}+N-i} \cdot q^i,$$

где $C^i_{\text{М}+N} = \dfrac{(\text{М}+N)!}{i!(\text{М}+N-i)!}$ – биномиальный коэффициент, называемый «числом сочетаний из М + N по i», т.е. сколькими разными способами можно реализовать ситуацию i из М + N;

p и q – вероятность безотказной работы и отказа элементов системы.

Для больших значений N и М ВБР определяется через неполную $\text{В}_\text{н}$ и полную В бэта-функции, которые табулированы.

$$P_{ск}(t) = \frac{B_н(N, \text{М}+1)}{B(N, \text{М}+1)}.$$

Скользящее резервирование дает значительный выигрыш в надежности.

3.7 Расчет надежности систем при мажоритарном методе резервирования

Анализ различных моделей резервирования показывает, что всем им присущи следующие недостатки: сложность коммутации и перерыв в работе системы по основной программе при замене отказавшего канала исправным.

Указанных недостатков лишена мажоритарная модель резервирования, которая предполагает вместо одного канала передачи сигнала включения нечетного количества (т ≥ 3) идентичных каналов устройств, выходные сигналы которых подаются на вход мажоритарного (восстанавливающего) органа (МО) (рис. 3.9).

МО – это логический элемент, на выходе которого формируется сигнал, совпадающий с большинством входных одинаковых сигналов, т.е. МО осуществляет операцию голосования или выбора по большинству (majority – большинство). При этом отказ $(m-1)/2$ каналов (устройств, блоков, узлов) не приводит к отказу системы в целом.

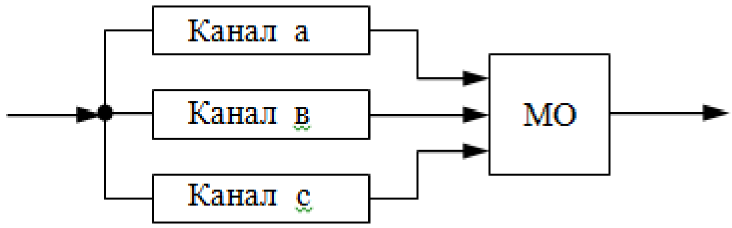


Рис. 3.9

На рис. 3.9 мажоритарное резервирование выполнено по схеме «два из трех», т.е. их трех сигналов выбираются два совпадающих сигнала.

Пусть вероятности безотказной работы каналов равны p(a), p(b), p(c). Соответственно вероятности отказов равны q(a), q(b), q(c).

Надежность приведенной схемы равна сумме вероятностей четырех ситуаций: все каналы исправны и по два исправных канала в трех ситуациях (сумма вероятностей всех работоспособных состояний).

$$P_3 = p(a)\cdot p(b)\cdot p(c) + p(a)\cdot p(b)\cdot q(c) + p(a)\cdot p(c)\cdot q(b) + p(b)\cdot p(c)\cdot q(a).$$

Если полагать, что p(a) = p(b) = p(c) = p и q(a) = q(b) = q(c)= q, то надежность схемы будет равна

$$P_3 = p^3 + 3p^2\cdot q = 3p^2 - 2p^3.$$

Использование такой схемы будет оправдано, если $P_3 > p$ или $3p - 2p^2 > 1$.

Повышение надежности схемы равно

$$\frac{P_3}{p} = 3p - 2p^2.$$

При этом должно быть $p > 0{,}5$.

С учетом МО вероятность безотказной работы будет равна

$$P_{мр}(t) = \left[3p^2(t) - 2p^3(t)\right]\cdot P_{МО}(t).$$

3.8 Расчет надежности восстанавливаемых резервированных систем

Рассмотрим резервированную восстанавливаемую систему, состоящую из двух элементов: основного и резервного. Структурная схема расчета надежности системы приведена на рис. 3.10.

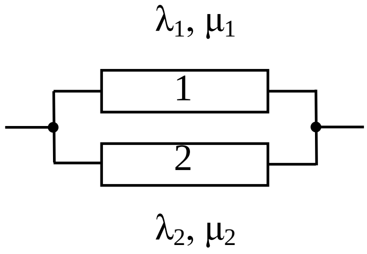


Рис. 3.10

На рисунке обозначены λ_1 и λ_2 – интенсивности отказов элементов; μ_1 и μ_2 – интенсивности восстановлений элементов.

В такой системе может быть две ситуации:

1. Приоритет отказа имеет место, т.е. важно, какой элемент отказал первым;

2. Отсутствует приоритет отказа, т.е. безразлично какой элемент отказал первым.

В качестве примера первой ситуации можно рассматривать систему, состоящую из двух ЭВМ: первая – основная, вторая – резервная, имеющая общее поле памяти с основной. Резервная ЭВМ при исправной работе основной ЭВМ может выполнять менее оперативные работы, которые свертываются при отказе основной ЭВМ. Вторая ЭВМ начинает выполнять задачи основной ЭВМ. После восстановления основной ЭВМ резервная возвращается к прерванным задачам.

Остановимся на первой ситуации: приоритет отказа имеет место. Определим функцию готовности $K_Г(t)$ при условии, что систему обслуживают две ремонтные бригады.

Рассматриваемая система может находиться в любой момент времени t в одном из четырех состояний:

0. Оба элемента исправны;

1. Отказал 1-й элемент, 2-й исправный;

2. Отказал 2-й элемент, 1-й исправный;

3. Отказали оба элемента, т.е. отказ системы.

Граф переходов системы представлен на рис. 3.11 (разветвленный граф).

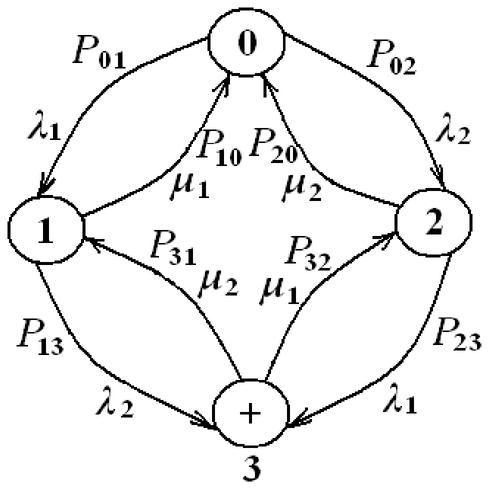


Рис. 3.11

На графе обозначены: вероятности отказов (прямых переходов) P_{01}, P_{02}, P_{13}, P_{23}; вероятности восстановлений (обратных переходов) P_{10}, P_{20}, P_{31}, P_{32}. Интенсивности переходов равны интенсивностям отказов и восстановлений: $\lambda_{01} = \lambda_1$, $\mu_{10} = \mu_1$ т.д. По приведенному графу составим систему дифференциальных уравнений по ранее приведенному правилу.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot P_0(t) + \mu_1 \cdot P_1(t) + \mu_2 \cdot P_2(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_1 \cdot P_0(t) - (\lambda_2 + \mu_1) \cdot P_1(t) + \mu_2 \cdot P_3(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_2 \cdot P_0(t) - (\lambda_1 + \mu_2) \cdot P_2(t) + \mu_1 \cdot P_3(t), \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_2 \cdot P_1(t) + \lambda_1 \cdot P_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) \cdot P_3(t). \end{cases}$$

Решая эту систему по преобразованию Лапласа, определяем вероятности состояний $P_i(t)$ и находим функцию готовности

$$К_Г(t)=\sum_{i=0}^{k-1} P_i(t),$$

где k – число работоспособных состояний системы.

Отметим важное свойство системы дифференциальных уравнений. Так как сумма всех вероятностей состояний системы равна $\sum_{i=0}^{n} P_i(t) = 1$, то $\sum_{i=0}^{n} \frac{dP_i(t)}{dt} = 0$. Это значит, что сумма правых частей системы уравнений всегда равна нулю. Такое свойство системы дифференциальных уравнений полезно иметь в виду при проверке правильности составления системы уравнений.

Далее определим ВБР рассматриваемой системы. Граф переходов в этом случае имеет вид (рис. 3.12). Запрещен переход из поглощающего состояния (3) в рабочие.

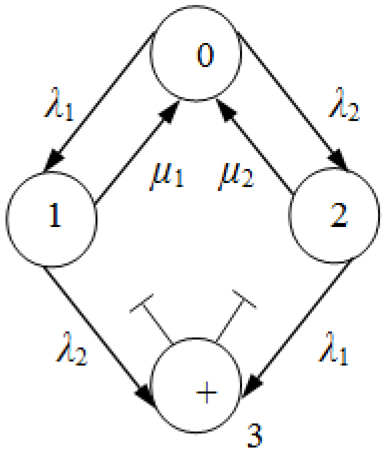


Рис. 3.12

В этом случае система дифференциальных уравнений будет следующая:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot P_0(t) + \mu_1 \cdot P_1(t) + \mu_2 \cdot P_2(t), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_1 \cdot P_0(t) - (\lambda_2 + \mu_1) \cdot P_1(t), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_2 \cdot P_0(t) - (\lambda_1 + \mu_2) \cdot P_2(t). \end{cases}$$

Используя преобразование Лапласа, находим вероятности рабочих состояний $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ и ВБР системы:

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{k-1} P_i(t) = P_0(t) + P_1(t) + P_2(t).$$

Процедуры определения $K_Г(t)$ и $P_c(t)$ идентичны, но результаты разные, т.к. в уравнениях разное число членов.

Рассмотрим вторую ситуацию – приоритет отказа отсутствует. В этом случае граф переходов будет иметь вид (рис. 3.13) (линейный граф).

В графе обозначены:

0. Основное состояние: оба элемента исправны;

1. Отказал один элемент;

2. Отказали оба элемента.

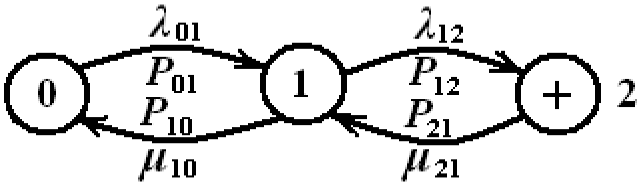


Рис. 7.13

На рис. 7.13 обозначены: λ_{01}, λ_{12} – интенсивности прямых переходов (отказов); μ_{10}, μ_{21} – интенсивности обратных переходов (восстановлений).

При расчетах по линейному графу интенсивности переходов должны быть выражены через интенсивности отказов и восстановлений, исходя из следующих положений. В основном состоянии работают оба элемента, поэтому переход в 1-е состояние может произойти за счет любого из них. Эта вероятность перехода будет больше, чем в случае одного работающего элемента. Поэтому в данном случае $\lambda_{01} = \lambda_1 + \lambda_2$. Для процесса восстановления $\mu_{21} = \mu_1 + \mu_2$, если две ремонтные бригады. Но если одна ремонтная бригада, то интенсивность каждого перехода будет равна интенсивности восстановления того элемента, который при данном переходе восстанавливается. Таким образом, для данного графа:

$\lambda_{01} = \lambda_1 + \lambda_2$; $\lambda_{12} = \lambda_1$ или λ_2;

$\mu_{21} = \mu_1 + \mu_2$; $\mu_{10} = \mu_1$ или μ_2.

Составляем систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01} \cdot P_0(t) + \mu_{10} \cdot P_1(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{01} \cdot P_0(t) - (\lambda_{12} + \mu_{10}) \cdot P_1(t) + \mu_{21} \cdot P_2(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12} \cdot P_1(t) - \mu_{21} \cdot P_2(t). \end{cases}$$

Решаем эту систему по преобразованию Лапласа, находим $P_i(t)$ и определяем $К_Г(t)$.

При определении ВБР для второй ситуации граф будет иметь вид (рис. 3.14).

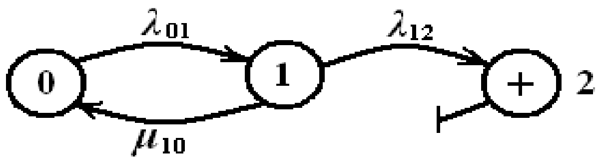


Рис. 3.14

Система дифференциальных уравнений в этом случае будет

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01} \cdot P_0(t) + \mu_{10} \cdot P_1(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{01} \cdot P_0(t) - (\lambda_{12} + \mu_{10}) \cdot P_1(t). \end{cases}$$

Тогда ВБР системы $P_c(t) = P_0(t) + P_1(t)$.

3.9 Расчет надежности восстанавливаемой резервированной системы в стационарном режиме

Стационарный (в теории массового обслуживания – устойчивый) режим существует при $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} <10$, где ρ – коэффициент загрузки (в ТМО). При стационарном режиме вероятности состояний становятся постоянными $P_i(t) = P_i$ = const и $dP_i(t)/dt = 0$. Дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические. При рассмотрении будем считать, что приоритет отказа отсутствует, т.е. не имеет значения, какой элемент отказал первым.

На рис. 3.15 приведена система и ее граф переходов. Все элементы равнонадежны.

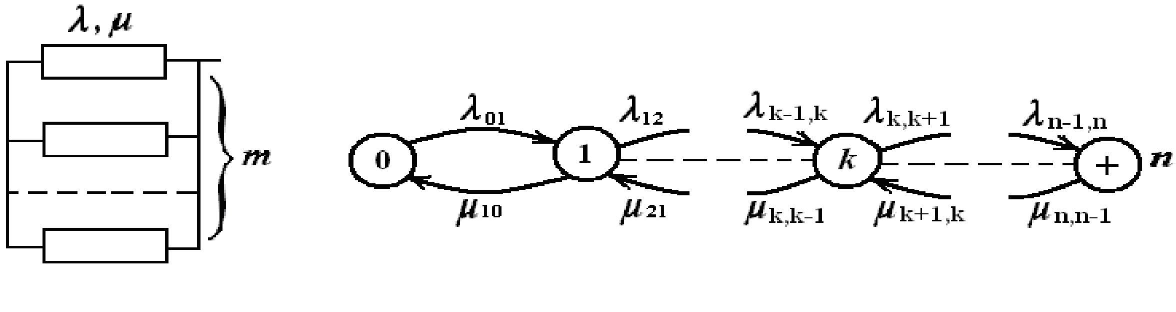


Рис. 3.15

Расчет надежности системы проводится в следующей последовательности.

1. Составляется по графу система алгебраических уравнений в соответствии с правилом, для стационарного режима:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_{01} \cdot P_0 + \mu_{10} \cdot P_1, \\ 0 = \lambda_{01} \cdot P_0 - (\lambda_{12} + \mu_{10}) \cdot P_1 + \mu_{21} \cdot P_2, \\ и \quad т.д. \end{cases}$$

2. Решая систему уравнений, находим вероятности каждого состояния.

Из 1-го уравнения:

$$P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}} \cdot P_0 = \rho_1 \cdot P_0.$$

Из 2-го уравнения:

$$P_2 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{01}}{\mu_{21} \cdot \mu_{10}} \cdot P_0 = \rho_2 \cdot P_1 = \rho_2 \cdot \rho_1 \cdot P_0.$$

Для k-го уравнения:

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1,k} \cdot \lambda_{k-2,k-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{01}}{\mu_{k,k-1} \cdot \mu_{k-1,k-2} \cdot \ldots \cdot \mu_{10}} \cdot P_0 = \rho_k \cdot P_{k-1} = \rho_k \cdot \rho_{k-1} \cdot \ldots \cdot \rho_2 \cdot \rho_1 \cdot P_0.$$

Вероятность k-го состояния можно записать по следующему правилу. Вероятность k-го состояния равна произведению некоторого коэффициента на вероятность основного состояния P_0. Коэффициент равен дроби, числитель которой – произведение интенсивностей переходов (отказов), стоящих над стрелками, идущими вправо от основного состояния до k-го, а знаменатель – произведение интенсивностей переходов (восстановлений), стоящих под стрелками, идущими влево от k-го состояния до основного.

Вероятность основного состояния определяется выражением

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}} + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{01}}{\mu_{21} \cdot \mu_{10}} + \ldots .. + \frac{\lambda_{n-1,n} \cdot \ldots \cdot \lambda_{01}}{\mu_{n,n-1} \cdot \ldots \cdot \mu_{10}}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \rho_1 + \rho_2 \cdot \rho_1 + \ldots + \rho_n \cdot \rho_{n-1} \cdot \ldots \cdot \rho_2 \cdot \rho_1},$$

в котором в знаменателе стоит сумма всех коэффициентов (для P_0 коэффициент равен 1).

Коэффициент готовности системы равен $К_Г = \sum_{i=0}^{k-1} P_i$.

3.10 Определение среднего времени работы резервированной системы до отказа

3.10.1 Система восстанавливаемая

Рассмотрим, как и ранее, две ситуации: с приоритетом отказа и без приоритета.

а) Система имеет приоритет отказа.

Рассмотрим систему, состоящую из двух элементов (рис. 7.12 и 7.14).

Используя полученные ранее после преобразования Лапласа уравнения, имеем систему

$$\begin{cases} z \cdot P_0(z) - P_0(t=0) = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0(z) + \mu_1 \cdot P_1(z) + \mu_2 \cdot P_2(z), \\ z \cdot P_1(z) - P_1(t=0) = \lambda_1 \cdot P_0(z) - (\lambda_2 + \mu_1) \cdot P_1(z), \\ z \cdot P_2(z) - P_2(t=0) = \lambda_2 \cdot P_0(z) - (\lambda_1 + \mu_2) \cdot P_2(z). \end{cases}$$

Учитывая, что T =P(z) при z =0, а также, что P_0(t =0) =1, P_1(t =0) =P_2(t =0) =0, получаем систему уравнений для определения времен нахождения системы в рабочих состояниях T_0, T_1 и T_2:

$$\begin{cases} -1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot T_0 + \mu_1 \cdot T_1 + \mu_2 \cdot T_2, \\ \ \ 0 = \lambda_1 \cdot T_0 - (\lambda_2 + \mu_1) \cdot T_1, \\ \ \ 0 = \lambda_2 \cdot T_0 - (\lambda_1 + \mu_2) \cdot T_2. \end{cases}$$

После решения системы находим среднее время работы системы до отказа:

$$T_{cp} = \sum_{i=0}^{k-1} T_i .$$

Уравнения для расчета среднего времени работы системы записывается по графу по следующему правилу.

В левой части первого уравнения (для основного состояния) ставится минус единица, во всех других уравнениях, в левой части ставится ноль. В правой части уравнений записывается столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием, для которого составляется уравнение. Каждый член равен произведению интенсивности перехода, переводящей систему по направлению стрелки, на время пребывания в том состоянии, из которого исходит стрелка. Если стрелка исходит из состояния, то перед произведением ставится знак минус, если стрелка входит в состояние – ставится знак плюс. Время пребывания в поглощающем состоянии (отказа) принимается равным нулю.

Количество уравнений соответствует числу работоспособных состояний системы.

б) Система не имеет приоритет отказа.

Система состоит из двух элементов (рис. 3.10). Граф переходов в этом случае будет иметь вид (рис. 3.14).

По графу, в соответствии с приведенным правилом записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 = -\lambda_{01} \cdot T_0 + \mu_{10} \cdot T_1, \\ 0 = \lambda_{01} \cdot T_0 - (\lambda_{12} + \mu_{10}) \cdot T_1. \end{cases}$$

Решая систему, находим T_0 и T_1, после чего определяем среднее время безотказной работы системы

$$T_{cp} = \sum_{i=0}^{k-1} T_i .$$

3.10.2 Система не восстанавливаемая

Рассмотрим три способа расчета времени работы T.

а) Система имеет приоритет отказа.

Система та же, но $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Граф переходов имеет вид (рис. 3.16).

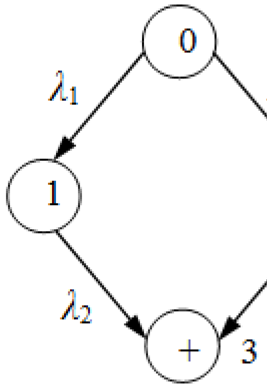


Рис. 3.16

В этом случае система уравнений запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} -1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot T_0, \\ 0 = \lambda_1 \cdot T_0 - \lambda_2 \cdot T_1, \\ 0 = \lambda_2 \cdot T_0 - \lambda_1 \cdot T_2. \end{cases}$$

Откуда: $T_0 = \dfrac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)}$; $\qquad T_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}$;

$$T_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)}; \qquad T = \sum_{i=0}^{k-1} T_i .$$

б) Система не имеет приоритет отказа.

Граф переходов имеет вид (рис. 3.17)

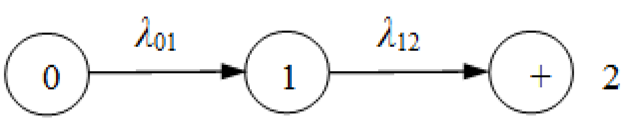


Рис. 3.17

В графе: $\lambda_{01} = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_{12} = \lambda_1$ или λ_2.

Система уравнений:

$$\begin{cases} -1 = -\lambda_{01} \cdot T_0, \\ 0 = \lambda_{0i} \cdot T_0 - \lambda_{12} \cdot T_1. \end{cases}$$

Откуда: $T_0 = \dfrac{1}{\lambda_{01}} = \dfrac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$; $\qquad T_1 = \dfrac{1}{\lambda_{12}}$.

в) Расчет для невосстанавливаемой системы без применения графа переходов

Такую систему можно рассчитывать на основе применения теоремы умножения вероятностей и формулы расчета времени при любом законе распределения времени безотказной работы.

Для резервированной системы из двух элементов, для которых $P_1(t) = e^{-\lambda_1 \cdot t}$ и $P_2(t) = e^{-\lambda_2 \cdot t}$ имеем:

$$P_{рез}(t) = 1 - \prod_{j=1}^{2}\left(1 - P_i\right) = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2) =$$
$$= P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2 = e^{-\lambda_i \cdot t} + e^{-\lambda_2 \cdot t} - e^{-(\lambda_i + \lambda_2)t}$$

– закон не экспоненциальный.

Поэтому используем формулу

$$T = \int_0^\infty P_{рез}(t) \cdot dt = \int_0^\infty \left[e^{-\lambda_1 \cdot t} + e^{-\lambda_2 \cdot t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot t}\right] \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = T_1 + T_2 - \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2}.$$

Если оба элемента системы равнонадежны $\lambda_1 = \lambda_2$, то во всех трех способах расчета получаем одинаковый результат

а) $T_0 = \dfrac{1}{2\lambda}, \quad T_1 = \dfrac{1}{2\lambda}, \quad T_2 = \dfrac{1}{2\lambda}, \quad T = \dfrac{3}{2\lambda}.$

б) $T_0 = \dfrac{1}{2\lambda}, \quad T_1 = \dfrac{1}{\lambda}, \quad T_o = \dfrac{3}{2\lambda}.$

в) $T = 2\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{2\lambda} = \dfrac{3}{2\lambda}.$

3.11 Аудиторные задания

1. Сколько различных слов длиной восемь букв можно составить в алфавите $\{0, 1\}$.

3.12 Самостоятельная работа

1. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

3.13 Контрольные вопросы

1. Приведите примеры зависимых и независимых случайных событий.

Тема 4. Расчет допусков размерных цепей

Цель занятия — изучить методы расчета допусков размерных цепей.

4.1 Исходные уравнения погрешностей для расчета допусков размерных цепей

Прежде, чем рассматривать методы расчета допусков, получим исходные уравнения погрешностей, на основе которых проводится расчет допусков различными методами.

В общем виде функциональная зависимость выходного параметра схемы N от параметров элементов q, представляется следующим образом

$$N = f\,(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Наличие производственных погрешностей у элементов схемы приводит к отклонению выходного параметра от номинального

$$N_0 + \Delta N = f\,(q_1+\Delta q_1, q_2+\Delta q_2, \ldots, q_n+\Delta q_n).$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора

$$N_0 + \Delta N = f_0(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial N}{\partial q_1}\cdot\Delta q_1 + \frac{\partial N}{\partial q_2}\cdot\Delta q_2 + \ldots + \frac{\partial N}{\partial q_n}\cdot\Delta q_n\right) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial q_1^2}\cdot\Delta q_1^2 + \frac{\partial^2 N}{\partial q_2^2}\cdot\Delta q_2^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 N}{\partial q_1\cdot\partial q_2}\cdot\Delta q_1\cdot\Delta q_2 + \ldots\right) + \ldots + R_n,$$

где R_n – остаточный член, f_0 – функция номинальных значений параметров элементов.

Таким образом, погрешность выходного параметра определяется всеми членами разложения, кроме первого.

Поскольку имеет смысл рассчитывать допуски только при малых отклонениях параметров от номиналов, т.е. полагая, что $\Delta N \ll N$ и $\Delta q_i \ll q_i$, изменения параметров в пределах поля допуска можно считать линейными, тогда ряд Тейлора записывается в следующем виде:

$$N_0 + \Delta N = f_0(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial N}{\partial q_1}\cdot\Delta q_1 + \frac{\partial N}{\partial q_2}\cdot\Delta q_2 + \ldots + \frac{\partial N}{\partial q_n}\cdot\Delta q_n\right) + R_n,$$

где R_n – нелинейная составляющая разложения.

Отсюда уравнение абсолютной погрешности выходного параметра (1-е исходное уравнение погрешности) имеет вид:

$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial q_1}\cdot\Delta q_1 + \frac{\partial N}{\partial q_2}\cdot\Delta q_2 + \ldots + \frac{\partial N}{\partial q_n}\cdot\Delta q_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N}{\partial q_i}\cdot\Delta q_i$, т.к. $N_0 = f_0(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Или

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \Delta q_i,$$

где $A_i = \frac{\partial N}{\partial q_i}$ – носит название чувствительности (в теории чувствительности) или коэффициента влияния (при расчете допусков).

Коэффициент влияния A_i – показывает, как влияет погрешность параметра элемента на погрешность выходного параметра. Произведение $A_i \cdot \Delta q_i$ называется парциальной погрешностью выходного параметра. Она обусловлена отдельным влияющим параметром элемента в общей погрешности выходного параметра. Парциальный (от лат. partalis) – частичный, отдельный.

Приведенное уравнение используется для расчета размерных цепей при одинаковой размерности параметров, например, механические размерные цепи. В обобщенных размерных цепях параметры элементов имеют разные размерности (Омы, Фарады, Генри, Вольты, Амперы и т.п.). Поэтому удобнее пользоваться не абсолютным Δq_i, а относительными погрешностями $\Delta q_i / q_i$.

Поделив левую и правую части первого уравнения погрешностей на N и Δq_i на q_i, получим второе исходное уравнение погрешностей для расчета относительной погрешности выходного параметра:

$$\frac{\Delta N}{N} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N}{\partial q_i}\cdot\frac{q_i}{N}\cdot\frac{\Delta q_i}{q_i} = \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot \frac{\Delta q_i}{q_i},$$

где $B_i = \frac{\partial N}{\partial q_i}\cdot\frac{q_i}{N} = A_i \cdot \frac{q_i}{N}$ – относительная чувствительность или коэффициент влияния для расчета относительной погрешности выходного параметра.

Произведение $B_i \cdot \frac{\Delta q_i}{q_i}$ также называется парциальной погрешностью.

4.2 Метод максимума-минимума (Минимаксный метод)

Этот метод носит также название «наихудшего случая». В основе метода лежит предположение, что все элементы цепи (схемы) имеют одновременно или все положительные или все отрицательные предельные отклонения, которые суммируются арифметически. Заменяя предельные отклонения допусками, получаем, используя уравнение погрешности, допуски на выходной параметр схемы

$$\delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{макс}=\sum_{i=1}^{n}B_i\cdot\delta_+\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right),\quad \delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{мин}=\sum_{i=1}^{n}B_i\cdot\delta_-\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right),$$

или в более удобной форме записи

$$\delta_{N_{макс}}=\sum_{i=1}^{n}B_i\cdot\delta q_{i^+},\quad \delta_{N_{мин}}=\sum_{i=1}^{n}B_i\cdot\delta q_{i^-},$$

где $\delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right)=\delta_N$ – половина поля допуска замыкающего звена;

$\delta\left(\frac{\Delta q_i}{q}\right)=\delta q_i$ – половина поля допуска i-го составляющего звена;

п – количество параметров элементов цепи (составляющих звеньев).

При расчете складываются вначале все положительные допуски, а затем все отрицательные.

Метод простой, но он не учитывает случайного характера распределения погрешностей в пределах поля допуска, а ориентируется только на предельные отклонения. Это ведет к завышению результатов расчета от 1,5 до 10 раз, что требует ужесточения допусков. Такая ошибка обусловлена тем, что расчет ведется по предельным отклонениям параметров элементов, которых в партии элементов имеется всего 0,27% при нормальном распределении.

Однако требование к более жестким допускам на параметры элементов в этом методе справедливо, если распределение параметров ЭРЭ подчиняется нормальному закону, что часто не соответствует действительности. Как показывает опыт, значительная часть функциональных узлов содержит не более 5…6 критических параметров. Это значит, что расчет их электрических допусков следует проводить методом наихудшего случая с учетом реального распределения параметров элементов.

В теории «Исследование операций» этот метод, часто применяемый из-за его математической определенности, называют «позицией крайнего пессимизма».

По поводу «метода наихудшего случая» в литературе отмечается, что он соответствует точкам, имеющим отклонение 8σ.

4.3 Метод квадратичного сложения

Метод заключается в том, что предельные отклонения параметров элементов суммируются квадратично

$$\delta N = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2 \cdot \delta_{q_i}^2}.$$

То есть в этом методе учитывается случайный характер распределения производственных отклонений.

Метод дает значительное (до 6 раз) занижение производственных погрешностей, что более опасно. Кроме того, он не учитывает реальное распределение погрешностей в пределах поля допуска и не учитывает величины, характеризующие центры группирования погрешностей. Поэтому метод квадратичного сложения не нашел широкого применения при анализе производственных погрешностей.

4.4 Вероятностный метод расчета допусков

Этот метод исходит из того факта, что отвергая метод «крайнего пессимизма», не следует становиться на противоположную позицию – крайнего или «залихватского» оптимизма, рассчитывая всегда на благоприятные условия, но известная доля риска при принятии решения все же должна присутствовать.

Метод предполагает алгебраическое суммирование средних значений и квадратичное суммирование среднеквадратических отклонений. Поэтому расчет допусков по вероятностному методу состоит в определении среднего значения погрешности и допуска выходного параметра цепи (рис. 4.1).

После определения средних значений и допусков на выходные параметры цепи можно определить предельное значение выходного параметра цепи

$$N_{пред} = N_{ном} + M(\Delta N) \pm \delta(\Delta N),$$

где $N_{ном}$ – расчетная величина выходного параметра, найденная по номинальным значениям функциональных параметров элементов цепи;

$M(\Delta N)$ – может быть и отрицательной величиной.

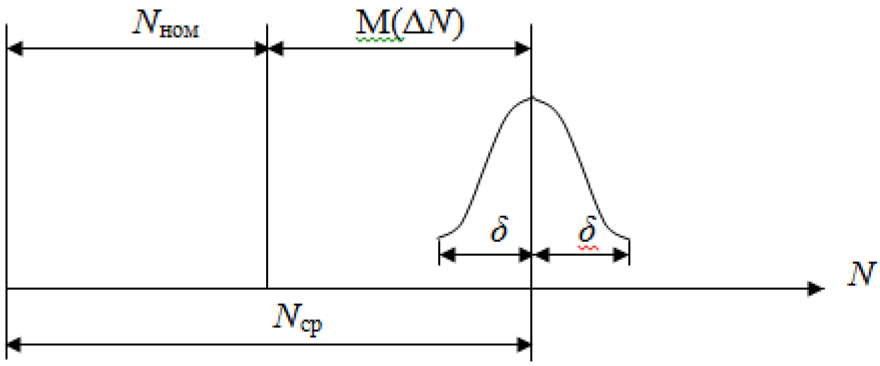


Рис. 4.1

Из рис. 4.1 следует, что

$$N_{ср} = N_{ном} + M(\Delta N).$$

Если $M(\Delta N) = 0$, то $N_{ср} = N_{ном}$.

Определим среднее значение погрешности выходного параметра цепи. Для этого используем исходное уравнение погрешности и правило суммирования средних значений случайных величин:

по уравнению погрешности запишем парциальную составляющую среднего значения (математического ожидания) погрешности выходного параметра цепи

$$\mathrm{M}\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_i = B_i \cdot \mathrm{M}\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right);$$

по правилу суммирования средних значений случайных величин получим

$$\mathrm{M}\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_i = \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot \mathrm{M}\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right),$$

где п – количество составляющих параметров звеньев цепи.

В справочниках на ЭРЭ не указываются средние значения погрешностей, а даются лишь характеристики поля допуска:

Δ – координата середины поля допуска,

δ – половина поля допуска.

Зная закон распределения параметра элемента в пределах поля допуска, можно найти в литературе по законам распределения величину α –

коэффициент относительной асимметрии распределения случайной величины (при симметричном распределении $\alpha = 0$).

Связь между средним значением случайной величины (математическим ожиданием) M(x) и характеристиками поля допуска представлена на рис. 4.2.

$$M(x) = \Delta(x) + \alpha \cdot \delta(x).$$

Или для нашего случая

$$M\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{\Sigma} = \Delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right) + \alpha_{\Sigma} \cdot \delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right) = \sum_{i=1}^{n} B_i \left[\Delta\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right) + \alpha_i \cdot \delta\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right)\right],$$

где $\Delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right)$ – координата середины поля допуска для выходного параметра;

α_{Σ} – коэффициент относительной асимметрии распределения погрешности выходного параметра;

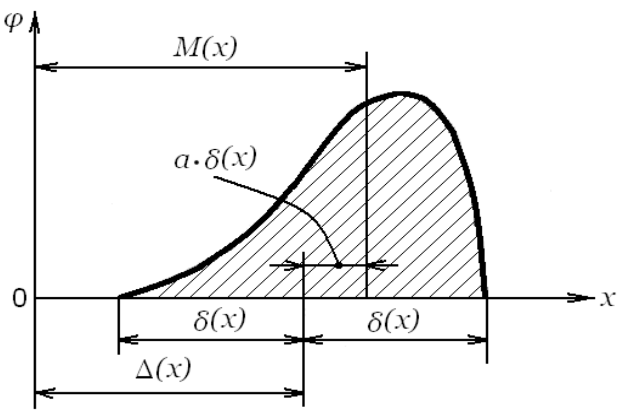


Рис. 9.2

$\delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right)$ – допуск на выходной параметр.

Аналогичные обозначения для погрешности параметра элемента цепи $\frac{\Delta q_i}{q_i}$.

По приведенному выражению рассчитывается систематическая погрешность выходного параметра цепи.

Полученное выражение на практике упрощается, исходя из следующих положений:

– допуски на параметры ЭРЭ симметричные, поэтому удобно совместить начало координат с серединой поля допуска, т.е. принять $\Delta\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right) = 0$;

– из теории вероятностей известно, что при композиции (суммировании) любых законов распределения результирующее распределение быстро стремится к нормальному (уже при 3-х, 4-х составляющих), которое является симметричным, т.е. $\alpha_{\Sigma} = 0$.

В таком случае можно приравнять центр группирования отклонений выходного параметра цепи координате середины поля допуска этого параметра. Окончательно получаем

$$\mathrm{M}\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{\Sigma} = \Delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right) = \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot \alpha_i \cdot \delta\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right).$$

Из этого выражения следует, что систематическая погрешность выходного параметра получается в том случае, когда распределения отклонений параметров элементов цепи являются асимметричными.

Определим допуск на выходной параметр цепи.

Используя исходное уравнение погрешностей и правило суммирования случайной части отклонений получим уравнение для расчета допуска на выходной параметр цепи.

По уравнению погрешности запишем парциальную погрешность выходного параметра, обусловленную погрешностью параметра элемента. Характеристикой рассеяния в пределах поля допуска является среднее квадратическое отклонение σ.

$$\sigma\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{i} = B_i \cdot \sigma\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right).$$

Случайные величины суммируются квадратично, тогда результирующее среднее квадратическое отклонение выходного параметра будет

$$\sigma\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2 \cdot \sigma^2\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right)}.$$

В справочниках на ЭРЭ не даются значения $\sigma\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right)$, а даются только допуски. Связь между σ и δ устанавливается через относительное среднее квадратичное отклонение b_i, которое имеется в справочниках для различных распределений, т.е. $b_i = \frac{\sigma_i}{\delta_i}$ или $\sigma_i = b_i \cdot \delta_i$. Заменяя среднее квадратическое отклонение получим допуск на выходной параметр цепи

$$\delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right) = \frac{1}{b_{\Sigma}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2 \cdot b_i^2 \cdot \delta^2\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right)},$$

где b_{Σ} и b_i относительные средние квадратические отклонения для выходного параметра и параметра элемента соответственно.

При нормальном законе δ = 3σ, т.е. $b_i = 1/3$.

В большинстве случаев погрешности параметров элементов распределяются в пределах поля допуска по нормальному закону. Однако подстановка в уравнение $b_i = 1/3$ не очень удобна. Бородичев Н.А. предложил сравнивать другие законы распределения с нормальным путем введения коэффициента относительного рассеивания

$$k_i = \frac{b_i}{b_н},$$

где $b_н = \frac{\sigma_н}{\delta_н}$ – относительное среднее квадратическое отклонение для нормального распределения, $b_н = 1/3$.

Если закон распределения i-го параметра нормальный, т.е. $b_i = 1/3$, то k_i = 1.

Введя k_i в формулу, получим выражение для расчета допуска на выходной параметр скалярных схем с несвязанными параметрами звеньев:

$$\delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right) = \frac{1}{k_\Sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2 \cdot k_i^2 \cdot \delta^2\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right)}.$$

Так как распределение отклонений выходного параметра, как правило, подчиняется нормальному закону, для которого k_Σ = 1, то окончательно получаем

$$\delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2 \cdot k_i^2 \cdot \delta^2\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right)}.$$

При этом процент риска по выходному параметру составляет 0,27%, т.е. такое количество изделий из партии изделий выйдет за пределы поля допуска.

Если по каким-либо причинам допустим другой процент риска (брака), то k_Σ следует брать из таблицы 4.1.

Таблица 4.1

Процент риска	0,27	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10,0
k_Σ	1	1,05	1,11	1,17	1,21	1,26	1,30	1,33	1,36	1,40	1,44

Вероятностный метод позволяет учитывать взаимные связи между погрешностями параметров в сложных элементах (электронные лампы, транзисторы), и в изделиях, выполненных по интегральной технологии – полупроводниковых и пленочных микросхемах. Значения параметров элементов, расположенных на одной плате, в силу единого цикла изготовления, являются коррелированными случайными величинами. Их погрешности также оказываются корреляционно связанными и степень их связи оценивается коэффициентом корреляции, который может принимать значения от 0 до ±1 (линейная корреляционная связь).

Учет коррелятивно зависимых допусков основывается на теории вероятностей о дисперсии суммы двух случайных величин, связанных корреляционной зависимостью

$$D(x+y)=D(x)+D(y)+2r_{xy}\sqrt{D(x)}\sqrt{D(y)}.$$

На основании приведенной формулы выражение для расчета допуска на выходной параметр скалярной схемы с учетом связей между допусками параметров элементов примет вид (при парной корреляции)

$$\delta\left(\frac{\Delta N}{N}\right)=\frac{1}{k_\Sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}B_i^2\cdot k_i^2\cdot\delta^2\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right)+2\sum_{i,j}r_{ij}\cdot B_i\cdot B_j\cdot k_i\cdot k_j\delta\left(\frac{\Delta q_i}{q_i}\right)\cdot\delta\left(\frac{\Delta q_j}{q_j}\right)},$$

где r_{ij} – коэффициент корреляции между допусками i и j параметров элемента(ов). Он имеет одно и то же значение как для связи параметров, так и для их погрешностей (допусков).

4.5 Аудиторные задания

1. Сколько различных слов длиной восемь букв можно составить в

алфавите {0, 1}.

4.6 Самостоятельная работа

1. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных

костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

4.7 Контрольные вопросы

1. Приведите примеры зависимых и независимых случайных собы-

тий.

Тема 5. Задачи оптимального резервирования

Цель занятия — изучить методы решения задач определения оптимальных параметров резервирования при существующих ограничениях.

5.1 Определение оптимального числа участков резервирования

Постановка задачи: выбрать оптимальное число участков резервирования, которое обеспечит максимальную надежность при заданных надежности переключающих устройств и кратности резервирования.

Имеем исходную систему, вероятность безотказной работы которой $P_c(t)$. Для повышения надежности используем раздельное резервирование замещением с переключателями I-го типа и кратностью резервирования m (резервирование с целой кратностью). Требуется определить оптимальное число участков резервирования – $n_{опт}$.

Для исходной системы, у которой все блоки приблизительно одинаковы по надежности

$$P_c(t) = P_{бл}^n(t).$$

Вероятность безотказной работы резервированной системы с переключателем I-го типа равна

$$P_{разд}^I(t) = [1 - (1 - P_n^I \cdot P_{бл})^{m+1}]^n.$$

В этом выражении заменим $P_{бл} = P_c^{1/n}$,

$$P_{разд}^I(t) = [1 - (1 - P_n^I \cdot P_c^{1/n})^{m+1}]^n.$$

Перейдем к вероятностям отказа системы Q_c и переключателя $q_п$:

$$Q_{разд}^I(t) = 1 - P_{разд}^I(t) = 1 - \left\{1 - \left[1 - (1 - q_n)(1 - Q_c)^{1/n}\right]^{m+1}\right\}^n.$$

Полагая, что $Q_c = 1 - P_c \ll 1$ и $q_п = 1 - P_п \ll 1$ (например, из-за небольшого времени их работы), разлагаем полученное выражение в ряд по степеням п и $1/n$: $(1-Q_c)^{1/n} \approx 1 - \frac{Q_c}{n}$. Тогда выражение для определения вероятности отказа резервированной системы, имеет вид

$$Q^{I}_{разд}(t) = 1 - \left\{ 1 - \left[1 - (1 - q_n)\left(1 - \frac{Q_c}{n}\right)\right]^{m+1} \right\}^{n} = 1 - \left[1 - \left(q_n + \frac{Q_c}{n} - q_n \cdot \frac{Q_c}{n} \right)^{m+1} \right]^{n} =$$

$$= 1 - \left[1 - \left(q_n + \frac{Q_c}{n} \right)^{m+1} \right]^{n} \approx n\left(q_n + \frac{Q_c}{n} \right)^{m+1}.$$

При выводе этого выражения пренебрегли членом $q_n \cdot \frac{Q_c}{n}$ ввиду его 2-го порядка малости и использовали разложение в ряд по степеням п, т.к. $\left(q_n + \frac{Q_c}{n} \right)^{m+1} << 1.$

Поскольку в задаче нет ограничений и функция дифференцируемая, то для нахождения экстремума функции применим метод оптимизации – дифференциальное исчисление (хотя п дискретно). Получаем

$$\frac{\partial Q^{I}_{разд}(t)}{\partial n} = \left(q_n + \frac{Q_c}{n} \right)^{m+1} - (m+1)\frac{Q_c}{n}\left(q_n + \frac{Q_c}{n} \right)^{m} =$$

$$= \left(q_n + \frac{Q_c}{n} \right)^{m} \left[q_n + \frac{Q_c}{n} - (m+1)\frac{Q_c}{n} \right] = \left(q_n + \frac{Q_c}{n} \right)^{m} \left(q_n - m\frac{Q_c}{n} \right) = 0.$$

Так как $\left(q_n + \frac{Q_c}{n} \right)^{m} \neq 0$, то следовательно $q_n - m\frac{Q_c}{n_{опт}} = 0$. Отсюда

$$n_{опт} = m\frac{Q_c}{q_n}.$$

5.2 Прямая задача оптимального резервирования

Постановка задачи: требуется найти такое количество резервных элементов m для каждого участка резервирования, чтобы заданный показатель надежности системы $P_з$ обеспечивался при минимальной массе системы. Резервирование постоянное с целой кратностью.

Полагаем, что надежность резервированной системы достаточно высокая, так что для проектируемой системы вероятность безотказной работы равна

$$P(\mathrm{M}) = 1 - Q(\mathrm{M}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} Q_{уч\,i} \geq P_з,$$

где М = < m_1, m_2, …, $m_п$ > – вектор состава системы;

$Q_{уч\,i}$ – вероятность отказа i-го участка системы;

п – количество участков резервирования.

Такое приближение допустимо при Q(М)< 0,1 и $\max Q_i << \frac{1}{n}$.

При нагруженном резерве $Q_{уч\,i} = q_i^{m_i+1}$,

где q_i – вероятность отказа i-го элемента основной (исходной) системы,

$т_i$ – кратность резервирования i-го участка.

Обозначим массу i-го элемента через G_i. Тогда масса резерва всей системы будет

$$G_\Sigma(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} G_i \cdot m_i \text{ – целевая функция.}$$

Сформулируем задачу: требуется найти минимум целевой функции

$$\min G_\Sigma(\mathrm{M}) = \min \sum_{i=1}^{n} G_i \cdot m_i$$

при уравнении ограничения

$$Q(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} q_i^{m_i+1} \leq Q_з \text{ или } Q(\mathrm{M}) - Q_з = 0.$$

Для решения задачи используем метод оптимизации – метод множителей Лагранжа, который, строго говоря, применим, когда условия ограничений (связи) заданы в виде равенств, а аргументы х являются непрерывными. Этот метод позволяет свести задачу нахождения условного экстремума, имеющего место в задачах с ограничениями (т.е. в технических задачах), к определению безусловного экстремума, который находится в той же точке пространства, что и условный. Для этого составляется функция Лагранжа, которая связывает целевую функцию и функции ограничений типа равенств, умноженных на неопределенные множители Лагранжа λ:

$$F_Л(\mathrm{M}, \lambda) = G_\Sigma(\mathrm{M}) + \lambda Q(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} G_i \cdot m_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} q_i^{m_i+1}.$$

Для любого искомого аргумента $т_i$ находим

$$\frac{\partial F_Л(\text{M},\lambda)}{\partial m_i}=\frac{\partial}{\partial m_i}\left(\sum_{i=1}^{n}G_i\cdot m_i+\lambda\sum_{i=1}^{n}q_i^{m_i+1}\right)=\frac{\partial}{\partial m_i}\left(G_i\cdot m_i+\lambda\cdot q_i^{m_i+1}\right)=$$
$$=G_i+\lambda\cdot\left(\ln q_i\right)\cdot q_i^{m_i+1}=0.$$

Отсюда: $$q_i^{m_i+1}=-\frac{G_i}{\lambda\cdot\ln q_i}=\frac{\alpha_i}{\lambda},\ \text{где}-\frac{G_i}{\ln q_i}=\alpha_i.$$

Подставляем это выражение в уравнение ограничения и получаем при условии равенства $Q_з=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\lambda}$. Откуда $\lambda=\frac{1}{Q_з}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\frac{1}{Q_з}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{G_i}{\ln q_i}\right)$, т.е. нашли неизвестный множитель λ, который выражен через известные величины $Q_з$, q_i и G_i.

Логарифмируем равенство $q_i^{m_i+1}=\frac{\alpha_i}{\lambda}$:

$$(m_i+1)\ln q_i=\ln\frac{\alpha_i}{\lambda}.$$

Отсюда, подставляя λ, находим m_i:

$$m_i=\frac{\ln{\alpha_i}/{\lambda}}{\ln q_i}-1=-\frac{\alpha_i}{G_i}\ln\frac{\alpha_i}{\lambda}-1.$$

Если при решении получаются не целочисленные значения m_i, то округляем их в сторону ближайшего большего и ближайшего меньшего целых чисел, производя перебор 2^n значений. Часть этих значений сразу же исключается, так как для них не выполняется требуемое условие $P(M)\geq P_з$. Из оставшихся решений выбирается то, которое характеризуется наименьшей суммарной массой резервных элементов.

Обратная задача оптимального резервирования формулируется так: требуется найти такое количество резервных элементов m_i для каждого участка резервирования, чтобы при заданной массе системы $G_з$ обеспечивалась максимально возможная надежность системы.

Требуется найти для целевой функции $Q_c(M)$

$$\min Q_c(\text{M})=\min\sum_{i=1}^{n}q_i^{m_i+1}$$

при уравнении ограничения (связи)

$$G_{\Sigma}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} G_i \cdot m_i \le G_з.$$

По методу Лагранжа эта задача решается аналогично прямой задаче.

Оптимальные задачи можно решать при нескольких лимитирующих факторах, например, стоимость и габариты, масса и габариты и т.п. При этом увеличивается число уравнений ограничений и λ.

Для случая, когда условие $Q \le 0{,}1$ не выполняется, решение рассмотренных задач по методу Лагранжа несколько усложняется. Но для случая, когда требуется обеспечить $P_з < 0{,}9$, обычно не используется раздельное резервирование. При общем резервировании рассмотренные задачи будут иметь тривиальное решение.

По указанной методике можно решать и другие задачи, например, оптимальный выбор количества запасных элементов, позволяющих обеспечить максимальный коэффициент готовности при заданных ограничениях по стоимости или по массе и т.п.

5.3 Аудиторные задания

1. Сколько различных слов длиной восемь букв можно составить в

алфавите {0, 1}.

5.4 Самостоятельная работа

1. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных

костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

5.5 Контрольные вопросы

1. Приведите примеры зависимых и независимых случайных собы-

тий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Аполонский С.М. Надежность и эффективность электрических аппаратов / С.М. Аполонский, Ю.В. Куклев. - 1-е изд. - С.-П. : Лань, 2011. - 448 с. - ISBN: 978-5-8114-1130-6. [электронный ресурс библиотека издательства Лань]

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2034

2. Малафеев С.И. Надежность технических систем. Примеры и задачи / С.И. Малафеев, А.И. Копейкин - 1-е изд. - С.-П. : Лань, 2012. - 320 с. - ISBN: 978-5-8114-1268-6. [электронный ресурс библиотека издательства Лань]

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2778

Дополнительная литература

1. Серафинович Л.П. Расчет надежности и конструирования радиоэлектронной аппаратуры : Справочное руководство / Л. П. Серафинович. - Томск : Издательство Томского университета, 1972. - 210 с. : ил. - Библиогр.: с. 196. - Б. ц. (99 экз.)

2. Конструирование и производство радиоаппаратуры : Учебное пособие / ред. А. К. Майер. - Томск : Издательство Томского университета, 1984. - 352[2] с. : ил. - Библиогр.: с. 344-347. - Б. ц. (125 экз.)

3. Иыуду К.А. Надежность, контроль и диагностика вычислительных машин и систем : Учебное пособие для вузов / Куста Аугустович Иыуду. - М. : Высшая школа, 1989. - 216 с. : ил. - Библиогр.: с. 213-214. - ISBN 5-06-000130-X (в пер.) : Б. ц. (10 экз.)

4. Половко А.М. Сборник задач по теории надежности : сборник задач / А. М. Половко [и др.] ; ред. А. М. Половко, ред. И. М. Маликов. - М. : Советское радио, 1972. - 406[2] с. - Библиогр.: с. 324. - Б. ц. (12 экз.)

5. Половко А.М. Основы теории надежности : Учебное пособие для вузов / А. М. Половко , С. В. Гуров. - 2-е изд., перераб. и доп. - СПб. : БХВ-Петербург, 2006. - 702[2] с. : ил., табл. - Библиогр.: с. 689-698. - Предм. указ.: с. 699-702. - ISBN 5-94157-541-6 (30 экз.)