Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра информационной безопасности электронно-вычислительных систем (КИБЭВС)

И.В. Кирнос

Математическая логика и теория алгоритмов

Методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы

Томск – 2012

И.В. Кирнос

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ. Методическое пособие. – Томск, ТУСУР, 2012, – 63 с.

В пособии по математической логике и теории алгоритмов приводятся теоретические сведения и задания для проведения практических занятий и выполнения домашних заданий для студентов специальности 090105 «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем».

Илья Васильевич Кирнос

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ И ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

1 Введение

Великий русский учёный Михайло Васильевич Ломоносов как-то изрёк: "Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит". Прежде всего это утверждение относится именно к математической логике. Именно логика обеспечивает нашему уму строгость. Конечно, человеческое мышление не сводится к одной только логике; даже научное познание требует от исследователя наличия интуиции.

Но когда мы говорим о вычислительных машинах, дело обстоит иначе. Я не знаю почти ничего о системах искусственного интеллекта, но обычные вычислительные приборы, к которым мы привыкли, строятся исключительно по законам математической логики.

Наш курс будет состоять из пяти частей. Первая из них будет посвящена логике высказываний. Здесь мы научимся строить из простых высказываний сложные, а также на основании истинности или ложности одних высказываний делать выводы об истинности или ложности других.

Вторую главу мы посвятим изучению булевых алгебр, переключательных функций и переключательных элементов, то есть непосредственно логических схем вычислительных устройств.

В третьей главе мы поговорим о логике предикатов, где обычные высказывания будут заменены утверждениями, зависящими от переменных, и эти утверждения будут истинными или ложными в зависимости от того, какие значения примут входящие в их состав переменные. Например, утверждение "$x > 0$" является истинным или ложным в зависимости от того, чему равен x.

Далее, в отличие от человеческого мозга, работа вычислительной машины всегда строится по алгоритму или по программе. Поэтому в четвёртой главе мы обсудим само понятие алгоритма, способы построения сложных алгоритмов из более простых, а также классификацию алгоритмов по степени их сложности.

Наконец, последняя, пятая глава будет посвящена обсуждению формальных аксиоматических теорий, то есть собственно построению математической науки. Эти вопросы мы изучим не потому, что они прямо возникают в информационной безопасности, но именно для того, чтобы привести в порядок ваши умы.

2 Логика высказываний

В этой главе, как я уже говорил, мы научимся строить сложные высказывания, а также судеть об истинности или ложности одних высказываний на основании знаний об истинности или ложности других.

2.1 Высказывания и логические связки

Опр. *Под высказыванием понимается утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.*

Примеры

Смоленск стоит на берегу Днепра — истинное высказывание.

Томск находится в Америке — ложное высказывание.

Вставай, страна огромная! — не высказывание, а призыв.

Который час? — не высказывание, а вопрос.

Город стоит на берегу моря — также не высказывание, поскольку не ясно, о каком именно городе идёт речь, так что нельзя приписать счесть это утверждение определённо истинным или определённо ложным.

Итак, призывы, наставления, вопросы, недостаточно определённые утверждения — всё это высказываниями не является.

Из простых неделимых высказываний можно построить более сложные при помощи логических связок.

Примеры

Неверно, что Томск, находится в Америке.

Завтра пойдёт снег или будет солнечно.

Завтра ударит мороз и будет солнечно.

В логике неделимые высказывания обозначаются латинскими буквами a, b, c, P, Q, R, $\ldots$, а логические связки — знаками $\&, \vee, \wedge, \rightarrow, \ldots$. Эти связки таковы, что истинностные значения составных высказываний определяются только истинностными значениями простых высказываний, а не их смыслом.

Опр. *Отрицанием высказывания P называется высказывание $\neg P$, истинное тогда и только тогда, когда P ложно. Обозначается также через $\overline{P}$ или P'.*

Опр. *Конъюнкцией или логическим произведением высказываний P и Q называется высказывание $P\&Q$, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Обозначается также через $P \wedge Q$.*

Опр. *Дизъюнкцией или логической суммой высказываний P и Q называется высказывание $P \vee Q$, ложное тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания.*

Опр. *Импликацией или следованием высказываний P и Q называется высказывание $P \supset Q$, ложное тогда и только тогда, когда P истинно, а Q ложно. Обозначается также через $P \rightarrow Q$.*

Здесь важно подчеркнуть, что из ложного утверждения следует всё, что угодно. Из него можно вывести как любое истинное утверждение, так и любое ложное, даже то, которое, казалось бы, никак не связано с первым.

Примеры

1. $(1 = 0) \rightarrow (0 = 0)$.
   Имея неверное утверждение $1 = 0$, мы домножаем обе части этого неравенства на 0 и тем самым получаем верное утверждение $0 = 0$.

2. $(2 + 2 = 5) \rightarrow$ "Я — Билл Гейтс".
   Исходя из неверного равенства $2 + 2 = 5$, вычтем 2 из левой и правой части.

Получим $2 = 3$. Теперь вычтем ещё единицу. Получим $1 = 2$. Теперь переставим левую и правую части местами: $2 = 1$. Билл Гейтс и я — нас двое. Однако $2 = 1$, так что Билл Гейтс и я — это одно лицо. Следовательно, я Билл Гейтс.

Опр. *Эквиваленцией двух высказываний P и Q называется высказывание $P \sim Q$, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения высказываний совпадают. Обозначается также через $P \leftrightarrow Q$.*

В завершение раздела приведём таблицу, сводящую воедино определения всех введённых логических операций:

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	И

2.2 Формулы логики высказываний

В этом разделе мы определим правила составления сложных высказываний из простых.

Напомню, что алфавитом называется любое непустое множество. Элементы этого множества называются символами (знаками). Словом называется любая непустая последовательность символов (возможно, пустая). Слово a называется подсловом слова b, если $b = b_1ab_2$.

Опр. *Высказывательной переменной называется величина, которая может принимать 2 значения: И (истина) и Л (ложь).*

Алфавит логики высказываний состоит из высказывательных переменных $X_1, X_2, \ldots$, знаков логических операций $\wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow$, скобок (,).

Опр. *Слово в алфавите логики высказываний называется формулой, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Любая высказывательная переменная является формулой.*

2. *Если A и B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ — тоже формулы.*

3. *Только те слова являются формулами, для которых это следует из первых двух правил.*

В дальнейшем при записи формул будем опускать лишние скобки.

Опр. *Подформулой называется подслово формулы, которое само является формулой.*

Примеры

x, $x \wedge (\neg y)$, $(x \to y) \vee x$ — формулы;

$x\neg y$, (, $x \vee (y$ — не формулы.

В наших рассуждениях мы часто будем использовать принцип математической индукции, который можно изложить следующим образом. Пусть имеется утверждение

$P(t)$, зависящее от натурального числа t, и его справедливость доказана для $t = 1$. Тогда, если $\forall t \in \mathbb{N}$ удаётся из справедливости $P(t)$ вывести справедливость $P(t+1)$, то $P(t)$ справедливо для всех t.

В приложении к формулам логики высказываний это звучит следующим образом. Пусть $P(F)$ — утверждение, зависящее от переменной F, которая пробегает все возможные высказывательные формулы (для которых мы хотим это утверждение доказать). Если нам удалось доказать это утверждение для формул F с наименьшим возможным числом высказывательных переменных, а также из справедливости при n переменных (n произвольно) вывести справедливость при $(n+1)$-й переменной, то тем самым мы доказали справедливость $P(F)$ $\forall F$.

Примеры

1. Докажем, что $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Для этого обозначим сумму первых n натуральных чисел через $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Проверим, что для $n = 1$ утверждение справедливо. Действительно, $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1 = S_1$. Теперь предположим, что для $n = k$ утверждение доказано: $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Посмотрим, что будет происходить при $n = k+1$: $S_{k+1} = S_k + (k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$. Таким образом, из справедливости утверждения при $n = k$ мы вывели его справедливость при $n = k + 1$. Утверждение доказано $\forall n$.

2. Теперь докажем, что
$$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \ldots \wedge X_n = \text{И} \Leftrightarrow X_1 = \text{И и } X_2 = \text{И и } \ldots \text{ и } X_n = \text{И}.$$
Для $n = 1$ истинность этого утверждения очевидна. Теперь предположим, что для $n = k$ оно тоже справедливо. При $n = k + 1$
$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_{k+1} = \text{И} \Leftrightarrow X_1 \wedge \ldots \wedge X_k = \text{И и } X_{k+1} = \text{И} \Leftrightarrow X_1 = \text{И и } \ldots \text{ и } X_{k+1} = \text{И}.$$
Утверждение доказано.

Каждому распределению истинностных значений высказывательных переменных, входящих в формулу, соответствует определённое истинностное значение самой формулы. Таким образом, если в формулу входит n переменных, то она задаёт истинностную функцию: $\{\text{И, Л}\}^n \to \{\text{И, Л}\}$. Эта функция может быть изображена истинностной таблицей. Простейшие примеры истинностных таблиц мы видели в предыдущем разделе. Теперь же рассмотрим более сложный.

Пример

Построим истинностную таблицу формулы $\overline{x \vee y} \to x$.

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \vee y} \to x$
И	И	И	Л	И
И	Л	И	Л	И
Л	И	И	Л	И
Л	Л	Л	И	Л

Среди логических операций возможно ввести приоритет:

1. В первую очередь выполняется операция отрицания $\overline{x}$.
2. Во вторую — логическое умножение $x \wedge y$.
3. В третью очередь — логическое сложение $x \vee y$.
4. Наконец, в последнюю очередь выполняются операции следования $x \to y$ и эквиваленции $x \leftrightarrow y$, которые не имеют преимущества друг перед другом.

2.3 Равносильности формул

Опр. *Две формулы называются равносильными, если их истинностные значения совпадают при любом распределении истинностных значений переменных. Обозначение:* $A \equiv B$.

Для любых формул A, B и C справедливы следующие

Основные равносильности:

1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$;
2. $A \wedge A \equiv A$;
3. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$;
4. $A \vee B \equiv B \vee A$;
5. $A \vee A \equiv A$;
6. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$;
7. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
8. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
9. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$;
10. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$;
11. $\overline{\overline{A}} \equiv A$;
12. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$;
13. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$;
14. $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$;
15. $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$;
16. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \equiv (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$;

17. $A \to B \equiv \overline{A} \vee B \equiv \overline{A \wedge \overline{B}}$;

18. $A \vee B \equiv \overline{A} \to B \equiv \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$;

19. $A \wedge B \equiv \overline{A \to \overline{B}} \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:
Докажем сначала равносильность 9 посредством таблицы истинности.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л

Видим, что последний столбец полностью совпадает со столбцом для A. Таким образом, формулы равносильны.

Теперь докажем равносильность $A \to B \equiv \overline{A \wedge \overline{B}}$ без помощи таблицы истинности. $A \to B =$ Л $\Leftrightarrow A =$ И и $B =$ Л $\Leftrightarrow A =$ И и $\overline{B} =$ И $\Leftrightarrow A \wedge \overline{B} =$ И $\Leftrightarrow \overline{A \wedge \overline{B}} =$ Л. Таким образом, формулы $A \to B$ и $\overline{A \wedge \overline{B}}$ одновременно принимают значение Л, а значит, одновременно принимают и значение И. Таким образом, они равносильны. □

Утверждение 2.3.1

Пусть $A \equiv B$ и C — произвольная формула. Тогда $\overline{A} \equiv \overline{B}$, $A \wedge C \equiv B \wedge C$, $A \vee C \equiv B \vee C$, $A \to C \equiv B \to C$, $C \to A \equiv C \to B$, $A \leftrightarrow C \equiv B \leftrightarrow C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:
Докажем, для примера, равносильность $A \wedge C \equiv B \wedge C$. Рассмотрим некоторый набор истинностных значений переменных, входящих в формулы A, B, C. Поскольку $A \equiv B$, то на этом наборе формулы A и B принимают одно и то же истинностное значение. Обозначим его через s. Формула C на этом наборе принимает некоторое значение t. Тогда обе стороны доказываемой равностельности принимают одно и то же значение $s \wedge t$, а поскольку набор значений высказывательных переменных был произвольным, то формулы $A \wedge C$ и $B \wedge C$ всегда принимают одно и то же значение. Стало быть, они равностильны. □

Утверждение 2.3.2

Пусть $A \equiv B$ и C — произвольная формула, в которой выделено одно вхождение высказывательной переменной X_i. Пусть C_A — формула, получающаяся из C заменой этого вхождения X_i на A, а C_B — заменой на B. Тогда $C_A \equiv C_B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:
Воспользуемся методом математической индукции, выбрав в качестве параметра n число символов в C.

<u>$n = 1$</u>

В этом случае $C = X_i$. Тогда $C_A = A$, $C_B = B$.
$A \equiv B \Rightarrow C_A \equiv C_B$. Для $n = 1$ утверждение доказано.
Теперь предположим, что утверждение доказано $\forall n < k$. Докажем, что оно справедливо и для $n = k$.

$\underline{n = k}$
Согласно определению формулы, C может иметь один из следующих видов: $\overline{D}$, $D \wedge E$, $D \vee E$, $D \to E$, $E \to D$, $D \leftrightarrow E$, где подформулы D и E имеют числа логических символов $< k$, а выделенное вхождение переменной X_i содержится в D.
Итак, D содержит $< k$ логических символов $\Rightarrow$ (по предположению) $D_A \equiv D_B \Rightarrow$ (по утв. 2.3.1) $\overline{D_A} \equiv \overline{D_B}$, $D_A \wedge E \equiv D_B \wedge E$, $D_A \vee E \equiv D_B \vee E$, $D_A \to E \equiv D_B \to E$, $E \to D_A \equiv E \to D_B$, $D_A \leftrightarrow E \equiv D_B \leftrightarrow E$. Стало быть, во всех случаях $C_A \equiv C_B$. $\square$
Утверждение 2.3.3 (правило равносильных преобразований)
Пусть C_A — формула, содержащая A в качестве своей подформулы. И пусть C_B получается из C_A заменой в этом вхождении A и B. Тогда, если $A \equiv B$, то $C_A \equiv C_B$.
Доказательство очевидно выводится из предыдущего утверждения.
Утверждение 2.3.4 (правило устранения логических символов $\to$ и $\leftrightarrow$)
Для каждой формулы можно указать равносильную ей формулу, не содержащую знаков $\to$ и $\leftrightarrow$.
Д о к а з а т е л ь с т в о:
Обратимся к равносильностям 16 и 17. Опираясь на правило равносильных преобразований, можно каждую подформулу вида $A \leftrightarrow B$ заменить на $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$, а каждую подформулу вида $A \to B$ — на $\overline{A} \vee B$. После таких преобразований формула и обретёт искомый вид. $\square$

2.4 Тождественно истинные формулы

Опр. *Формула называется*

1. *Тождественно истинной (тавтологией), если она истинна при любом наборе значений входящих в неё высказывательных переменных.*
2. *Тождественно ложной (противоречием), если она ложна при любом наборе значений входящих в неё высказывательных переменных.*
3. *Выполнимой, если существует набор значений высказывательных переменных, на котором она истинна.*
4. *Опровержимой, если существует набор значений высказывательных переменных, на котором она ложна.*

Наиболее важные тождественно истинные формулы:

1. $A \vee \overline{A}$;
2. $A \to A$;
3. $A \to (A \to B)$;
4. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

6. $(A \wedge B) \to A$;
7. $A \to (B \to (A \wedge B))$;
8. $A \to (A \vee B)$;
9. $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$;
10. $((A \to B) \to A) \to A$.

2.5 Нормальные формы формул

В настоящем разделе будем рассматривать формулы, содержащие только логические операции $\neg, \wedge, \vee$. Символы $\wedge$ и $\vee$ будем называть двойственными друг другу.
Опр. *Формула A^* называется двойственной формуле A, если она получается из A заменой всех символов $\wedge$ и $\vee$ на двойственные.*
Пример
Если $A = x \wedge (y \vee \overline{z})$, то $A^* = x \vee (y \wedge \overline{z})$.
Следует, однако, предостеречь читателей, что приоритет в выполнении логических операций может привести к неверному переходу к двойственной формуле. Например, в формуле $A = x \wedge y \vee x \wedge z$ хочется просто заменить все символы на двойственные и получить $A^* = x \vee y \wedge x \vee z$, однако это будет неправильно. Для правильного перехода надлежит сперва расставить все скобки (как если бы операции не имели приоритета друг перед другом) $A = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ и лишь затем менять символы на двойственные: $A^* = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Это и будет правильный переход к двойственной формуле.

Отметим ещё очевидное свойство: $(A^*)^* = A$.
Опр. *Пусть $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ — некоторый упорядочённый список высказывательных переменных, а $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ — соответствующий список высказывательных значений этих переменных. Список истинностных значений $\langle t_1, t_2, \ldots, t_n \rangle$ назовём двойственным к списку $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$, если $\langle t_1, t_2, \ldots, t_n \rangle$ получается из $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ заменой всех И на Л и всех Л на И.*
Пример
Если $\langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \rangle = \langle$И, Л, Л, И, Л$\rangle$, то двойственный список
$\langle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \rangle = \langle$Л, И, И, Л, И$\rangle$.
Утверждение 2.5.1
Пусть A — формула, $\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ — высказывательные переменные этой формулы, а $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ — список истинностных значений этих переменных. Тогда A принимает значение И при этих значениях переменных $\Leftrightarrow$ $A^* =$Л на списке $\langle t_1, t_2, \ldots, t_n \rangle$, двойственном к списку $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$.
Д о к а з а т е л ь с т в о:
Проведём индукцию по параметру n — числу логических связок в формуле.
$\underline{n = 0}$
В этом случае $A = X_i \Rightarrow A^* = X_i$. Стало быть, $A = s_i =$ И $\Leftrightarrow A^* = t_i =$ Л.
Теперь предположим, что утверждение доказано $\forall n < k$.
$\underline{n = k}$

A имеет один из следующих видов: $\overline{B}$, $B \wedge C$, $B \vee C$, причём числа логических связок в B и в C меньше k. Сначала рассмотрим случай $A = \overline{B}$.
$A =$ И на $\langle s \rangle \Leftrightarrow B =$ Л на $\langle s \rangle \Leftrightarrow B^* =$ И на $\langle t \rangle \Leftrightarrow A^* = \overline{B^*} =$ Л на $\langle t \rangle$.
Теперь пусть $A = B \wedge C$.
$A =$ И на $\langle s \rangle \Leftrightarrow B =$ И на $\langle s \rangle$ и $C =$ И на $\langle s \rangle \Leftrightarrow B^* =$ Л на $\langle t \rangle$ и $C^* =$ Л на $\langle t \rangle \Leftrightarrow A^* = B^* \vee C^* =$ Л на $\langle t \rangle$.
Теперь — $A = B \vee C$:
$A =$ Л на $\langle s \rangle \Leftrightarrow B =$ Л на $\langle s \rangle$ и $C =$ Л на $\langle s \rangle \Leftrightarrow B^* =$ И на $\langle t \rangle$ и $C^* =$ И на $\langle t \rangle \Leftrightarrow A^* = B^* \wedge C^* =$ И на $\langle t \rangle$. $\square$
Утверждение 2.5.2 (принцип двойственности)
Если $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.
Доказательство:
Нужно: $A^* =$ И $\Leftrightarrow B^* =$ И.
Рассмотрим произвольный набор значений высказывательных переменных $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$.
$A^* =$ И на $\langle s \rangle \Leftrightarrow A =$ Л на двойственном наборе $\langle t \rangle \Leftrightarrow B =$ Л на $\langle t \rangle \Leftrightarrow B^* =$ И на $\langle s \rangle$.
$\square$

Опр. *Формулы вида $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ будем называть многочленным конъюнкциями, а формулы вида $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ — многочленными дизъюнкциями.*

Опр. *Формула называется элементарной конъюкцией, если она является конъюнкцией (быть может, одночленной) переменных и отрицаний переменных.*

Примеры элементарных конъюнкций:
x, $\overline{x}$, $x \wedge y$, $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$ — элементарные конъюнкции.
$\overline{x \wedge y}$, $x \wedge (y \vee z)$ — не элементарные конъюнкции.

Опр. *Говорят, что формула находится в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), если она является дизъюнкцией (быть может, одночленной) элементарных конъюнкций.*

Примеры ДНФ:
x, $\overline{x} \wedge y$, $x \vee y$, $x \vee (y \wedge \overline{z})$, $(x \wedge \overline{y}) \vee (z \wedge w) \vee (y \wedge \overline{z})$ — всё это дизъюнктивные нормальные формы.

Замечание
Пользуясь методом математической индукции, можно доказать дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции и конъюнкции относительно дизъюнкции при любом числе связок:

$$(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \wedge (B_1 \vee B_2 \vee \ldots B_m) =$$
$$= A_1 \wedge B_1 \vee A_1 \wedge B_2 \vee \ldots \vee A_1 \wedge B_m \vee A_2 \wedge B_1 \vee \ldots \vee A_2 \wedge B_m \vee \ldots \vee A_n \wedge B_m,$$

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots B_m) =$$
$$= (A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_2) \wedge \ldots (A_1 \vee B_m) \wedge (A_2 \vee B_1) \wedge \ldots \wedge (A_2 \vee B_m) \wedge \ldots \wedge (A_n \vee B_m).$$

Утверждение 2.5.3
Всякую формулу можно преобразовать к формуле с тесными отрицаниями, то есть если A — формула, то существует такая формула B, что $A \equiv B$ и в B отрицания содержатся только непосредственно перед переменными.
Доказательство:

Проведём индукцию по числу n — числу логических связок в формуле A.
$\underline{n = 0}$
В этом случае формула выглядит очень просто: $A = X_i$. Очевидно, это — формула с тесными отрицаниями.
$\underline{n = 1}$
В этом случае формула A может иметь один из следующих видов: $\neg X_i$, $X_i \vee X_j$, $X_i \wedge X_j$. Всё это — формулы с тесными отрицаниями.
Теперь предположим, что утверждение доказано $\forall n < k$.
$\underline{n = k}$
Разберём последовательно все случаи:

1. $A = \neg B$.
   а) Формула B сама является отрицанием некоторой другой формулы: $B = \neg C$. Тогда $A = C$, а C содержит логических связок $< k$ и, следовательно, приводится к виду с тесными отрицаниями.
   б) $B = C \wedge D$. Тогда $A = \neg C \vee \neg D$, а формулы C и D содержат логических связок $< k$, следовательно, по предположению, приводятся к виду с тесными отрицаниями.
   в) $B = C \vee D$. Тогда $A = \neg C \wedge \neg D$ и рассуждаем так же, как в предыдущем подпункте.

2. $A = B \vee C$. Формулы B и C содержат $< k$ логических связок, следовательно, приводятся к формулам с тесными отрицаниями. Дизъюнкция этих последних и будет формулой A, приведённой к виду с тесными отрицаниями.

3. $AB \wedge C$. Рассуждаем так же, как и в предыдущем пункте. $\square$

Пример
$\overline{(x \vee y) \wedge (z \vee \overline{x})} \equiv \overline{x \vee y} \vee \overline{z \vee \overline{x}} \equiv (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{z} \wedge x)$.
Утверждение 2.5.4 (о приведении к ДНФ)
Для любой формулы A можно указать равносильную ей формулу, находящуюся в ДНФ. Такая формула называется дизъюнктивной нормальной формой формулы A.
Д о к а з а т е л ь с т в о:
Данное утверждение докажем посредством указания способа такого преобразования. Преобразование производится в 3 шага:

1. Если в A содержатся знаки $\to$ и $\leftrightarrow$, то находим $A_1 \equiv A$, где эти знаки не содержатся (это всегда можно сделать, согласно утверждению 2.3.4).

2. A_1 преобразуем к формуле A_2 с тесными отрицаниями (утверждение 2.5.3).

3. В каждом случае, где имеется конъюнкция дизъюнкций, пользуемся дистрибутивностью.

В итоге и получим ДНФ формулы A. $\square$
Пример
$\overline{x \to y} \leftrightarrow (y \vee \overline{z}) \equiv \overline{\overline{x} \vee y} \leftrightarrow (y \vee \overline{z}) \equiv \overline{\overline{x} \vee y} \wedge (y \vee \overline{z}) \vee \overline{\overline{\overline{x} \vee y}} \wedge \overline{y \vee \overline{z}} \equiv x \wedge \overline{y} \wedge (y \vee \overline{z}) \vee (\overline{x} \vee y) \wedge \overline{y} \wedge z \equiv (x \wedge \overline{y} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (y \wedge \overline{y} \wedge z)$.

Опр. *Формула называется элементарной дизъюнкцией, если она является дизъюнкцией (возможно, одночленной) переменных и отрицаний переменных.*
Примеры
$x, x \lor y, \overline{x}, x \lor y \lor \overline{z} \lor \overline{t}$ — элементарные дизъюнкции.

Опр. *Говорят, что формула находится в конъюнктивной нормальной форме (КНФ), если она является конъюнкцией (возможно, одночленной) элементарных дизъюнкций.*
Утверждение (о приведении к КНФ)
Для любой формулы можно указать равносильную ей формулу, находящуюся в КНФ.
Д о к а з а т е л ь с т в о:
Формула приводится к КНФ так же, как и к ДНФ, только на третьем шаге используется дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции. $\square$
Пример
$(x \land y) \leftrightarrow (\overline{x} \land z) \equiv (x \land y) \land (\overline{x} \land z) \lor (\overline{x \land y} \land \overline{\overline{x} \land z}) \equiv (x \land y \land \overline{x} \land z) \lor ((\overline{x} \lor \overline{y}) \land (x \lor \overline{z}))$.
Первая скобка в последней формуле тождественно ложна, поскольку $x \land \overline{x} \equiv 0$, так что окончательно формула принимает вид $(\overline{x} \lor \overline{y}) \land (x \lor \overline{z})$.

Далее мы рассмотрим, зачем нужны КНФ и ДНФ.

2.6 Разрешимость для логики высказываний

Задача о разрешимости состоит в том, чтобы в конечное число шагов выяснить, является ли формула тождественно истинной. Очевидно, эта задача имеет решение: для каждой формулы можно построить таблицу истинности и по ней определить, может ли формула принимать значение Л. Укажем, однако, другой способ решения этой же задачи.
Утверждение 2.6.1
Формула является тождественно истинной $\Leftrightarrow$ в её КНФ каждая из элементарных дизъюнкций содержит некоторую переменную вместе с её отрицанием.
Д о к а з а т е л ь с т в о:
$\Leftarrow$) Если в дизъюнкцию входит переменная X_i и её отрицание $\overline{X_i}$, то эта дизъюнкция $X_i \lor \overline{X_i} \lor \ldots$ тождественно истинна. Конъюнкция дизъюнкций также истинна.
$\Rightarrow$) Если формула тождественно истинна, то все члены конъюнкции истинны, то есть истинны все элементарные дизъюнкции. Предположим теперь, что среди них существует элементарная дизъюнкция, в которую никакая переменная не входит вместе со своим отрицанием. Тогда каждой переменной, входящей в дизъюнкцию без отрицания, положим значение 0 (ложь), а каждой переменной, входящей с отрицанием — значение 1 (истина). Тогда все элементы дизъюнкции обратяться в ложь $\Rightarrow$ сама дизъюнкция обратиться в ложь, а значит и вся формула обратиться в ложь, что противоречит исходному положению о её тождественной истинности. Таким образом, если формула в КНФ тождественно истинна, то в каждую из её элементарных дизъюнкций должна входить некоторая переменная вместе со своим отрицанием. $\square$
Пример
$(x \lor \overline{y} \lor z \lor \overline{x}) \land (y \lor \overline{x} \lor \overline{y}) \land (z \lor \overline{z})$ — тождественно истинная формула.
$(x \lor \overline{x} \lor y \lor z \lor \overline{y}) \land (x\overline{y} \lor \overline{z})$ не является тождественно истинной, поскольку в последнюю элементарную дизъюнкцию ни одна переменная не входит вместе со своим отрицанием,

так что если положить $x = 0, y = 1, z = 1$, то формула обратится в ложь.

Подобное же утверждение существует и для тождественно ложных формул.

Утверждение 2.6.2
Формула является тождественно ложной $\Leftrightarrow$ *в её ДНФ в каждую из элементарных конъюнкций входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием.*
Доказательство почти дословно повторяет доказательство предыдущего утверждения.

2.7 Совершенные ДНФ и КНФ

Опр. *ДНФ называется совершенной (СДНФ), если в каждую из её элементарных конъюнкций входят все переменные, содержащиеся в формуле, причём только по одному разу.*
Опр. *КНФ называется совершенной (СКНФ), если в каждую из её элементарных дизъюнкций входят все переменные, содержащиеся в формуле, причём только по одному разу.*
Примеры
$(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z)$ — СКНФ.
$(\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{z}) \wedge (x \vee y \vee z)$ — не СКНФ (во вторую дизъюнкцию не входит y).
$(x \vee y \vee \overline{x} \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$ — не СКНФ (в первую дизъюнкцию x входит дважды).
$(x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge \overline{t})$ — СДНФ.

Всякую формулу можно привести к СКНФ и СДНФ. Читателям предоставляется возможность самим разобраться с преобразованием формул от обычных нормальных форм к совершенным.

ДНФ и КНФ полезны тем, что они позволяют установить тождественную истинность и тождественную ложность формул. А совершенные нормальные формы позволяют строить формулы с наперёд заданными свойствами.

Пример 1
Требуется построить формулу от четырёх переменных, которая истинна только в двух случаях: $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $t = 0$ и $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 0$, а в остальных случаях ложна. Тогда мы строим для каждого из этих двух "истинных" случаев элементарную конъюнкцию: $\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}$ и $x \wedge y \wedge z \wedge \overline{t}$, то есть в каждом случае "истинная" переменная входит без отрицания, а "ложная" — с отрицанием. Искомая формула предстанет в виде СДНФ $(\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \wedge \overline{t}) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge \overline{t})$.

Пример 2
Требуется построить формулу от четырёх переменных, которая ложна только в трёх случаях: $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 1$ и $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 1$, и $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 1$. Каждому из этих случаев сопоставляем элементарную дизъюнкцию: $\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t}$ и $x \vee y \vee z \vee \overline{t}$, и $\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t}$, то есть, наоборот, каждую "истинную" переменную берём с отрицанием, а каждую "ложную" — без отрицания. Итак, искомая формула в виде СКНФ: $(\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t}) \wedge (x \vee y \vee z \vee \overline{t}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{t})$.

На самом деле, в обоих примерах можно было использовать как СКНФ, так и СДНФ; выбор определялся лишь соображением краткости. В частности, если бы в первом примере мы решили использовать СКНФ, то нам пришлось бы расписывать $2^4 - 2 = 14$ "ложных" случаев, а во втором примере, для получения СДНФ, — $2^4 - 3 = 13$

"истинных" случаев.

3 Булевы алгебры

3.1 Определение булевых алгебр

Опр. *Множество элементов B с заданными на нём двуместными операциями $\wedge$ и $\vee$ (конъюнкции и дизъюнкции) и одноместной операцией $\neg$ (отрицанием) называется булевой алгеброй, если для любых элементов $f, g, h \in B$ выполнены следующие аксиомы:*

1. $f \wedge g = g \wedge f, \quad f \vee g = g \vee f$ *(коммутативность);*
2. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h), \quad (f \vee g) \vee h = z \vee (g \vee h)$ *(ассоциативность);*
3. $f \wedge f = f, \quad f \vee f = f$ *(идемпотентность);*
4. $f \wedge (g \vee h) = (f \wedge g) \vee (f \wedge h), \quad f \vee (g \wedge h) = (f \vee g) \wedge (f \vee h)$ *(дистрибутивность);*
5. $\neg(\neg f) = f$ *(закон инволюции);*
6. $\neg(f \wedge g) = \neg f \vee \neg g, \quad \neg(f \vee g) = \neg f \wedge \neg g$ *(законы де Моргана);*
7. $f \wedge (g \vee \neg g) = f, \quad f \vee (g \wedge \neg g) = f$ *(законы нейтральности);*
8. $f \wedge (g \vee f) = f, \quad f \vee (g \wedge f) = f$ *(законы поглощения).*

Из перечисленных законов можно вывести, что для любых f и g

$$f \wedge \neg f = g \wedge \neg g, \quad f \vee \neg f = g \vee \neg g.$$

Например, $f \wedge \neg f = (f \wedge \neg f) \vee (g \wedge \neg g) = (g \wedge \neg g) \wedge (f \wedge \neg f) = g \wedge \neg g$.

Если обозначить $f \wedge \neg f \equiv \mathbb{O}$, $f \vee \neg f \equiv \mathbb{L}$, то выполняются равенства:

$$\neg \mathbb{L} = \mathbb{O}, \quad \neg \mathbb{O} = \mathbb{L},$$

$$f \wedge \mathbb{L} = f, \quad f \wedge \mathbb{O} = \mathbb{O},$$

$$f \vee \mathbb{L} = \mathbb{L}, \quad f \vee \mathbb{O} = f.$$

Определение. *Булева алгебра называется вырожденной, если $\mathbb{O} = \mathbb{L}$.*

В этом случае $f = f \wedge \mathbb{L} = f \wedge \mathbb{O} = \mathbb{O} = \mathbb{L}$. Следовательно, других элементов такая алгебра не содержит.

Всякая же невырожденная алгебра содержит два нейтральных элемента: $\mathbb{O}$ (нулевой элемент) и $\mathbb{L}$ (единичный элемент).

Примеры булевых алгебр.

1. *Двоичная модель.*
   Такая алгебра содержит ровно два элемента: $\mathbb{O}$ и $\mathbb{L}$. Операции вводятся посредством таблиц:
$$\begin{array}{ccc} \vee & \mathbb{L} & \mathbb{O} \\ \mathbb{L} & \mathbb{L} & \mathbb{L} \\ \mathbb{O} & \mathbb{L} & \mathbb{O} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \wedge & \mathbb{L} & \mathbb{O} \\ \mathbb{L} & \mathbb{L} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{L} & \mathbb{O} \\ \neg & \mathbb{L} & \mathbb{O} \end{array}.$$

2. *Модель исчисления высказываний*
   Элементами данной алгебры являются всевозможные высказывания, операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания тождественны ранее введённым, а нейтральными элементами являются тождественно ложное высказывание (оно играет роль элемента $\mathbb{O}$) и тождественно истинное высказывание (играет роль $\mathbb{L}$).

3. *Теоретико-множественная модель.*
   Здесь рассматривается некоторое непустое множество U. Булева алгебра представляет собой $P(U)$ — множество всех подмножеств множества U, где в качестве конъюнкции $\wedge$ выступает пересечение множеств $A \cap B$, в качестве дизъюнкции $\vee$ — объединение $A \cup B$, а в качестве отрицания $\neg$ — дополнение множества A до универсума U: $\overline{A} \equiv \{x \in U | x \notin A\}$. Здесь $\mathbb{L} = U$, $\mathbb{O} = \varnothing$.

Кроме конъюнкции и дизъюнкции важны следующие операции:

1. $f \downarrow g = \neg(f \vee g)$ — стрелка Пирса (функция Пирса),
2. $f | g = \neg(f \wedge g)$ — штрих Шеффера,
3. $f \to g = \neg f \vee g$ — следование (импликация),
4. $f \backslash g = f \wedge \neg g$ — разность,
5. $f \leftrightarrow g = (f \wedge g) \vee (\neg f \wedge \neg g)$ — эквивалентность,
6. $f + g = (f \wedge \neg g) \vee (\neg f \wedge g)$ — симметрическая разность (исключающее "или", неэквивалентность, сумма Жегалкина).

3.2 Булевы функции

Определение. *Пусть M — произвольная булева алгебра. Рассмотрим множество n-местных функций $f : M^n \to M$ с поточечно определёнными операциями $\wedge, \vee, \neg$, то есть пусть $f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда, по определению,*

$$f_1 \wedge f_2 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$f_1 \vee f_2 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\neg f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \neg f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Множество таким образом определённых функций является булевой алгеброй и называется булевыми функциями.

В этой алгебре нулевым элементом является функция $0 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \mathbb{O}$, а единичным элементом — функция $1 : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \mathbb{L}$.

Определение. *Если алгебра M двухэлементна (то есть содержит только $\mathbb{O}$ и $\mathbb{L}$), то булевы функции называются двоичными функциями. Если же теперь $\mathbb{L}$ истолковывать как "включено", а $\mathbb{O}$ — как "выключено", то двоичные функции называются переключательными функциями.*

Всякую переключательную функцию можно записать в виде таблицы, полностью повторяющей таблицу истинности для формул логики высказываний.

Оказывается, что всякую переключательную функцию можно выразить через небольшое число основных функций, например, через $\wedge, \vee, \neg$. Сейчас мы докажем ряд утверждений, описывающих такую возможность.

Утверждение 3.2.1

Для всякой n-местной переключательной функции выполняется соотношение

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \ & (a_i \wedge f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)) \vee \\ & \vee (\neg a_i \wedge f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Для доказательства нужно рассмотреть всего два случая: $a_i = 1$ и $a_i = 0$.

1. Пусть $a_i = 1$. Тогда $\neg a_i = 0$ и в правой части равенства получаем

$$\begin{aligned} & (1 \wedge f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)) \vee (0 \wedge f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)) = \\ & \quad = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n) \vee 0 = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

   то есть то же, что и в левой части. Таким образом, для случая $a_i = 1$ утверждение доказано.

2. Теперь пусть $a_i = 0$. Тогда $\neg a_i = 1$ и в правой части равенства получаем

$$\begin{aligned} & (0 \wedge f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)) \vee (1 \wedge f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)) = \\ & \quad = 0 \vee f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

   то есть то же, что и в левой части. Таким образом, утверждение доказано. □

Утверждение 3.2.2 (о булевой нормальной форме)

Каждую переключательную функцию можно однозначно представить в дизъюнктивной нормальной форме:

$$\begin{aligned} & f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge f(1, 1, \ldots, 1)) \vee (\overline{a}_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge f(0, 1, \ldots, 1)) \vee \\ & \quad \vee (a_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge f(1, 0, 1, \ldots, 1)) \vee \ldots \vee (a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} \wedge \overline{a}_n \wedge \\ & \quad \wedge f(1, 1, \ldots, 1, 0)) \vee (\overline{a}_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge f(0, 0, 1, \ldots, 1)) \vee \\ & \quad \vee (\overline{a_1} \wedge a_2 \wedge \overline{a}_3 \wedge a_4 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge f(0, 1, 0, 1, \ldots, 1)) \vee \ldots \vee (\overline{a}_1 \wedge \overline{a}_2 \wedge \ldots \wedge \overline{a}_n \wedge f(0, 0, \ldots, 0)). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:
Применяем утверждение 3.2.1 последовательно к a_1, a_2, ..., a_n и в итоге получаем искомое выражение. □

Определение. *Система функций* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ *называется полной, если любая булева функция может быть выражена через функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *с помощью композиции (составления сложных функций).*

Утверждение 3.2.3 *Следующие системы булевых функций полны:* $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \to\}$, $\{+, \wedge, 1\}$, $\{\downarrow\}$, $\{|\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:
Полнота системы $\{\neg, \wedge, \vee\}$ была доказана в предыдущем утверждении. Чтобы доказать полноту любой другой системы, достаточно выразить функции $\neg, \wedge, \vee$ через функции этой "другой" системы. Докажем, например, полноту системы, состоящей из штриха Шеффера.

$$\neg f = \neg(f \wedge f) = f|f,$$

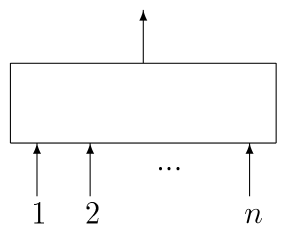
$$f \wedge g = \neg(\neg(f \wedge g)) = (\neg(f \wedge g))|(\neg(f \wedge g)) = (f|g)|(f|g),$$

$$f \vee g = \neg(\neg f \wedge \neg g) = \neg f | \neg g = (f|f)|(g|g).$$

Итак, любую булеву функцию можно выразить через $\wedge, \vee, \neg$, а их, в свою очередь, можно выразить через $|$. Значит, любую переключательную функцию можно выразить через штрих Шеффера. □

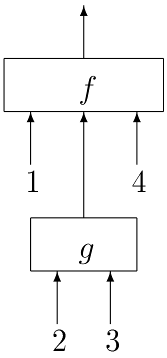
3.3 Переключательные элементы

Пусть имеется некоторое устройство, внутреннее строение которого нас не беспокоит, важно лишь, что оно имеет n упорядочённых входов и 1 выход:

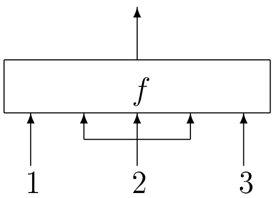


На каждый из входов могут подаваться 2 сигнала (например, отсутствие тока или наличие его), которые будем обозначать как 0 и 1. При этом на выходе также будет возникать один из двух сигналов, который однозначно определяется сигналами на входах. Такое устройство называется переключательным элементом. Ему, очевидно, соответствует некоторая переключательная функция. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — сигналы на входах, то $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — сигнал на выходе.

Если имеется несколько переключательных элементов, то можно составлять из них новые переключательные элементы, которым будут соответствовать новые переключательные функции. Например,

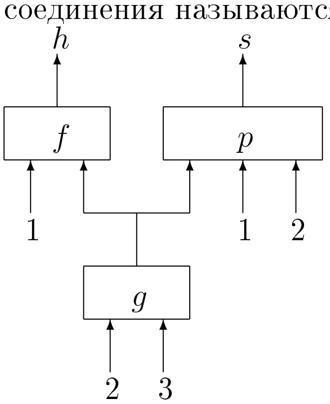


$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, g(x_2, x_3), x_4).$$



$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_2, x_2, x_3)$$

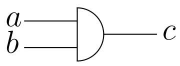
Можно создавать и более сложные соединения, уже с несколькими выходами. Такие соединения называются переключательными или комбинационными схемами.



$$h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(x_1, g(x_2, x_3)),$$

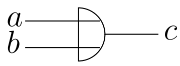
$$s(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = p(g(x_2, x_3), x_4, x_5).$$

Для переключательных элементов, соответствующих конъюнкции, дизъюнкции и отрицанию, существуют особые обозначения:



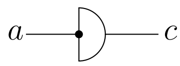
$c = a \wedge b$

И-элемент



$c = a \vee b$

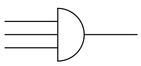
ИЛИ-элемент

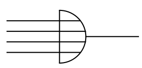


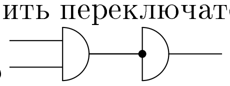
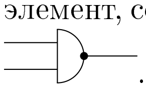
$c = \overline{a}$

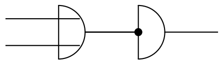
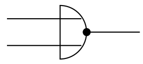
НЕ-элемент

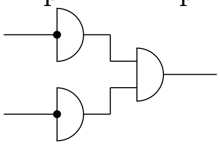
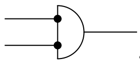
Применяются также обозначения И- и ИЛИ-элементов со многими входами:





Если требуется изобразить их в сочетании с НЕ-элементом, то ставят просто жирную точку там, где необходимо отрицание. Например, чтобы изобразить переключательный элемент, соответствующий штриху Шеффера $f|g = \overline{f \wedge g}$, вместо  рисуют .

Или для стрелки Пирса $f \downarrow g = \overline{f \vee g}$ вместо  рисуют 

или вместо  рисуют .

Пример

Полусумматор — это переключательная схема, которая осуществляет сложение двух цифр в двоичной системе счисления. У этой схемы два входа (a и b) и два выхода, на один из которых подаётся исключающее "или"$s = a + b = (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)$, а на другой — "и"$u = a \wedge b$.

ВСТАВИТЬ РИСУНОК.

Как было сказано в предыдущем разделе, существует несколько полных систем булевых функций. Это означает, что для построения любой переключательной схемы вместо элементов И, ИЛИ, НЕ можно использовать переключательных элементы, соответствующи функциям другой полной системы. В частности, любую схему можно составить из одних только штрихов Шеффера ВСТАВИТЬ РИСУНОК. Элементы И, ИЛИ, НЕ выразяться через него следующим образом: ВСТАВИТЬ РИСУНКИ. Тогда полусумматор будет выглядеть так: ВСТАВИТЬ РИСУНОК.

4 Логика предикатов

Существуют такие рассуждения, которые нельзя формализовать на языке логики высказываний. Например,

1. Перья есть только у птиц. Ни одна собака не является птицей. Следовательно, некоторые собаки лишены перьев.

2. Всякий, кто может решить эту задачу, — математик. Ни один математик не может решить эту задачу. Значит, она неразрешима.

3. Ни одно животное не бессмертно. Собаки — животные. Следовательно, все собаки не бессмертны.

Чтобы выяснить истинность этих рассуждений, недостаточно знать только об истинности входящих в их состав более коротких высказываний, а нужно разобраться с такими словами как "каждый "всякий"и "некоторые".

В приведённых рассуждениях рассматриваются предметы из различных предметных областей: собаки, птицы, математики. Введём переменные $x, y, z, \ldots$, значениями которых будут предметы из соответствующих предметных областей. Свойства предметов и отношения между ними будем обозначать через $P(x), Q(x, y), \ldots$. Выражения вида "все x обладают свойством P"будем обозначать как $\forall x P(x)$, а "некоторые x обладают свойством P— как $\exists x P(x)$.

Посмотрим, как теперь можно переписать вышеприведённые суждения:

1. $P(x)$ — x имеет перья,
   $Q(x)$ — x является птицей,
   $S(x)$ — x является собакой.
   $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall y(S(y) \to \overline{Q(y)}) \to \exists z(S(z) \wedge \overline{P(z)})$.

2. $P(x)$ — x может решить задачу,
   $Q(x)$ — x является математиком.
   $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall y(Q(y) \to \overline{P(y)}) \to \forall z\overline{P(z)}$.

3. $P(x)$ — x является животным,
   $Q(x)$ — x бессмертен,
   $S(x)$ — x является собакой.
   $\forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \wedge \forall y(S(y) \to P(y)) \to \forall z(S(z) \to \overline{Q(z)})$.

Опр. *Пусть дано множество M. n-местным предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над M называется функция $P : M^n \to \{И, Л\}$.*

Над предикатами можно выполнять обычные логические операции, создавая тем самым новые предикаты.

Пример

1. $P(x)$ — x кратен двум,
   $Q(x)$ — x кратен трём.
   Тогда предикат $P(x) \wedge Q(x)$ означает, что x кратен шести.

2. $P(x)$ — x имеет перья,
   $Q(x)$ — x является собакой.
   Тогда предикат $P(x) \vee Q(x)$ означает, что x имеет перья или является собакой.

Опр. (квантор общности) *Пусть $P(x)$ — предикат. Тогда формула $\forall x P(x)$ означает высказывание, которое истинно $\Leftrightarrow$ для всех $x \in M$ предикат $P(x)$ истинен.*
Опр. (квантор существования) *Пусть $P(x)$ — предикат. Тогда формула $\exists x P(x)$ означает высказывание, которое истинно $\Leftrightarrow$ найдётся такой $x \in M$, что предикат $P(x)$ истинен.*
Пример
Если вернуться к вышеприведённому примеру с делимостью чисел, то $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ будет означать: "существует число, которое делится на 6— истинное высказывание. А $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ будет означать: "все числа делятся на 6— ложное высказывание (в обоих случаях предполагалось, что x пробегает множество натуральных чисел).
Опр. *Алфавит языка логики предикатов содержит:*

1. *Знаки предметных переменных: $x, y, z, x_1, y_1, \ldots$;*

2. *Знаки предикатов: $P(x), Q(x, y), \ldots$;*

3. *Знаки логических операций: $\neg, \vee, \wedge, \to, \ldots$;*

4. *Знаки кванторов: $\forall, \exists$.*

Опр. *Предметная переменная x называется связанной, если она подверглась действию квантора, и свободной в противном случае.*
Опр. *Слово в алфавите логики предикатов называется формулой, если оно удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *Всякий предикат является формулой.*
2. *Если A — формула, то и $\overline{A}$ — формула с теми же связанными и свободными переменными, что и в A.*
3. *Если A и B — формулы, причём нет таких переменных, которые были бы связанными в одной формуле и свободными в другой, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ — тоже формулы.*
4. *Если A — формула, содержащая свободную переменную x, то $\exists x A(x)$ и $\forall x A(x)$ — тоже формулы.*
5. *Только те слова являются формулами, для которых это следует из правил 1–4.*

5 Теория алгоритмов

Алгоритм — это, грубо говоря, список указаний, предписывающих выполнение некоторых действий в определённой последовательности с целью решения всех задач какого-либо рода.

Например, при походе в магазин самообслуживания вы должны сдать сумку в камеру хранения, взять корзину, набрать нужного вам товару, пройти к кассе, заплатить за товар, взять сумку из камеры хранения, переложить покупки в неё. Для приготовления каши нужно залить молоко в кастрюлю, включить плиту на сильный огонь, дождаться кипения, засыпать крупу, дождаться кипения, переключить на слабый огонь, добавить соль и сахар, подождать определённое время, выключить плиту.

В этих и многих других случаях мы даже не задумываемся о том, что исполняем некий алгоритм: настолько эти действия нам привычны. Напротив, когда речь идёт о непревычных нам действиях, мы строго следуем предписаниям алгоритма. Например, если вы никогда не проявляли фотоплёнку, а такая нужда вдруг возникла, то вы внимательно прочтёте инструкцию и будете строго соблюдать её указания: сколько взять проявителя, сколько времени и при каких условиях держать плёнку в растворе... То же самое будет происходить, если вы вычитаете рецепт какого-нибудь хитрого торта и возьмётесь его готовить.

Большое количество алгоритмов встречается и в математике с первых классов школы. Это сложение, деление чисел, деление отрезка пополам, построение вписаннов в треугольник окружности, проведение параллельной прямой, вычисление площадей и объёмов фигур, вычисление определителей, производных, интегралов и т. д.

Между прочим, само слово "алгоритм"происходит от имени Мухаммеда аль-Хорезми, который в своём трактате описал индийскую систему чисел и правила арифметических действий над ними. Это и есть те самые цифры, которыми мы пользуемся и которые изобретены индусами, однако в Европе стали известны благодаря арабам, отчего их и прозвали арабскими.

Отметим основные черты всякого алгоритма. Прежде всего, это — наличие начальных данных и конечного итога (крупа и молоко — каша; состав для проявления плёнки, вода, непроявленная плёнка — проявленная плёнка; два числа — их сумма).

Во-вторых, применение алгоритма осуществляется путём последовательного выполнения простых действий. Эта разбитость на отдельные шаги называется дискретностью алгоритма.

Следующим важным свойством является то, что алгоритм призван решать не одну-единственную задачу, а целое семейство сходных задач (варка каши при наличии различного количества крупы; нахождение наибольшего общего делителя двух произвольных натуральных чисел, построение вписанной окружности для любого треугольника).

Важным свойством также является определённость алгоритма, то есть то, что алгоритм может быть выполнен другим человеком в другое время и в другом месте и итог получится таким же. Иначе говоря, предписания алгоритма настолько ясны и отчётливы, что не допускают двусмысленных толкований и произвола в исполнении. Это наводит на мысль, что выполнение алгоритма может быть поручено машине, ради чего мы и изучаем теорию алгоритмов.

Говоря о начальных данных, имеют в виду лишь допустимые начальные данные, то есть такие, которые заданы в понятиях алгоритма. Например, если начальными данными являются два числа, то мы не можем вместо них ввести молоко и крупу. И наоборот, из чисел каши не сваришь.

Среди допустимых начальных данных есть такие, к которым алгоритм применим, а могут оказаться и такие, которые не позволяют достичь требуемого итога. В последнем случае алгоритм либо продолжается бесконечно, либо наталкивается на препятствие и обрывается, не выдавая требуемого. Приведём примеры того и другого.

Пример 1. *Если делить 10 на 6 в столбик, то мы будем выписывать 1.66666... и никогда не перестанем делить (алгоритм не предусматривает того, чтобы "догадаться"о том, что и дальше будут шестёрки, и написать 1.(6)).*

Пример 2. *Рассмотрим следующий алгоритм:*

1. *Исходное число умножить на 2. Перейти к п. 2.*
2. *К полученному числу прибавить 1. Перейти к п. 3.*
3. *Определить остаток y от деления полученно в п. 2 суммы на 3. Перейти к п. 4.*
4. *Разделить исходное число на y. Частное является искомым итогом. Конец.*

Нетрудно проверить, что, применив этот алгоритм к числу 7, в 4-м пункте мы получим деление на ноль, что невозможно. Алгоритм безрезультатно оборвётся.

Итак, под алгоритмом понимается последовательность указаний, строго определяющая последовательность действий, состоящую из отдельных шагов и ведущую от начальных данных к искомому итогу, если таковой существует, через конечное число шагов; если же искомого итого не существует, то действия либо продолжаются бесконечно, либо попадают в тупик. Это — приблизительное определение алгоритма. Более точное требует новых теоретических построений, к чему мы теперь и перейдём.

5.1 Машина Тьюринга

5.1.1 Определение машины Тьюринга

Представим себе человека, который, находясь в определённом умонастроении, просматривает некую запись. Он вносит в неё изменения и переходит в новое умонастроение. Затем он снова просматривает запись, после чего вновь вносит изменения и меняет умонастроение. И так от проделывает до тех пор, пока не придёт в состояние полного удовлетворения.

Подобным образом действует и машина Тьюринга. А именно, она имеет бесконечную ленту, состоящую из ячеек. В каждое мгновение машина находится в каком-то состоянии и просматривает одну из ячеек ленты. Затем, в соответствии с программой, она меняет содержимое этой ячейки (или оставляет его неизменным), переходит в новое состояние (или остаётся в прежнем) и переходит к просматриванию следующей ячейки, справа или слева от прежней.

Опишем машину Тьюринга более тщательно. Машина Θ располагает конечным набором знаков, образующих так называемый внешний алфавит $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. В каждую ячейку ленты в каждое отдельное мгновение записана только одна буква. Ради удобства принято считать, что среди знаков алфавита A имеется пустая буква a_0 и именно она записана в пустую ячейку ленты. Лента предполагается неограниченной в обе стороны, но в каждое отдельное мгновение на ней записано конечное число непустых букв.

Далее, в каждый миг машина находится в одном состоянии из конечного набора $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$. Среди состояний выделяют два — начальное q_1 и заключительное q_0 (состояние остановки). Находясь в состоянии q_1, машина начинает работать. Попав в состояние q_0, она останавливается.

Работа машины определяется программой, которая состоит из команд. Каждая команда представляет собою выражение одного из следующих видов:

$$q_i a_j \to q_k a_l \text{С}; \quad q_i a_j \to q_k a_l \text{Л}; \quad q_i a_j \to q_k a_l \text{П}.$$

В выражениях первого вида знак "С" часто будем опускать.

Как же работает машина Тьюринга? Находясь в незаключительном состоянии, машина делает шаг, который полностью определяется её состоянием q_i и знаком a_j, записанным на просматриваемой ячейке ленты. Этот шаг $q_i a_j \to q_k a_l \text{X}$ (где $X = \{\text{С, Л, П}\}$) состоит в том, что:

1. Записанный в ячейке знак a_j заменяется знаком a_l (который может совпадать с a_j);

2. Машина переходит в новое состояние q_k (которое может также совпадать с q_i);

3. Машина переходит к обозрению следующей справа ячейки, если $X = \text{П}$; следующей слева, если $X = \text{Л}$; или же продолжает обозревать ту же ячейку, если $X = \text{С}$.

Очевидно, программа должна содержать одну и только одну команду, начинающуюся с $q_i a_j$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 0, 1, 2, \ldots, n$); поэтому программа машины содержит $m(n+1)$ команд.

Опр. *Словом в алфавите A или Q, или $A \cup Q$ называется любая непустая последовательность букв соответствующего алфавита.*
Опр. *Под k-й конфигурацией будем понимать изображение ленты машины с информацией, сложившейся на ней к началу k-го шага, с указание того, какая ячейка обозревается в этот шаг и в каком состоянии нахидится машина.*
Опр. *Конфигурация называется заключительной, если состояние, в котором находится машина, является заключительным.*
Опр. *Будем говорить, что непустое слово α в алфавите $A \backslash \{a_0\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ восприниматся машиной в стандартном положении, если оно записано в последовательных ячейках ленты, все другие ячейки пусты и машина обозревает крайнюю справа ячейку из тех, в которых записано слово α.*
Опр. *Стандартное положение называется начальным (заключительным), если машина при этом находится в начальном состоянии q_1 (в состоянии остановки q_0).*
Опр. *Будем говорить, что слово α перерабатывается машиной в слово β, если от слова α, воспринимаемого в начальном стандартном положении, машина после конечного числа шагов приходит к слову β, воспринимаемому в положении остановки.*

5.1.2 Применение машин Тьюринга к словам

Пример 1.
$A = \{0, 1\}$ — внешний алфавит (0 — знак пустой ячейки),
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ — алфавит внутренних состояний.
Программа:

$$q_1 0 \to q_2 0 \Pi, \quad q_2 0 \to q_0 1, \quad q_1 1 \to q_1 1 \Pi, \quad q_2 1 \to q_2 1 \Pi.$$

Посмотрим, в какое слово переработает такая машина слово 101, исходя из стандартного начального положения. Будем рисовать ленту с имеющимися на ней знаками (во всех пустых ячейках ленты записаны нули), причём над обозреваемой на данном шаге ячейкой будем указывать состояние, в котором машина находится на этом же шаге. Кроме того, будем указывать выполняемую на этом шаге команду программы.

(1)

						q_1				
				1	0	1				

$q_1 1 \to q_1 1 \Pi$.

(2)

							q_1			
				1	0	1	0			

$q_1 0 \to q_2 0 \Pi$

(3)

								q_2		
				1	0	1	0	0		

$q_2 0 \to q_0 1$

(4)

								q_0		
				1	0	1	0	1		

Более коротко эти преобразования можно записать так:

$$10 q_1 1 \Rightarrow 101 q_1 0 \Rightarrow 1010 q_2 0 \Rightarrow 1010 q_0 1$$

(содержимое обозреваемой ячейки записано справа от состояния, в котором находится машина).

Теперь посмотрим, во что переработает эта машина слово 11011, исходя из начального положения, при котором в состоянии q_1 обозревается крайняя левая ячейка из тех, в которых записано слово:

(1)

				q_1						
				1	1	0	1	1		

$q_1 1 \to q_1 1\text{П}$

(2)

					q_1					
				1	1	0	1	1		

$q_1 1 \to q_1 1\text{П}$

(3)

						q_1				
				1	1	0	1	1		

$q_1 0 \to q_2 0\text{П}$

(4)

							q_2			
				1	1	0	1	1		

$q_2 1 \to q_2 1\text{П}$

(5)

								q_2		
				1	1	0	1	1		

$q_2 1 \to q_2 1\text{П}$

(6)

									q_2	
				1	1	0	1	1	0	

$q_2 0 \to q_0 1$

(7)

									q_0	
				1	1	0	1	1	1	

В краткой записи

$$q_1 11011 \Rightarrow 1q_1 1011 \Rightarrow 11q_1 011 \Rightarrow 110q_2 11 \Rightarrow 1101q_2 1 \Rightarrow 11011q_2 0 \Rightarrow 11011q_0 1.$$

Таким образом, слово 11011 переработано машиной в слово 110111.

Пример 2

$A = \{0, 1, *\}$ — внешний алфавит,

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ — алфавит внутренних состояний,

программа:

$q_1 0 \to q_1 0\text{Л}$,	$q_2 0 \to q_3 1\text{П}$,	$q_3 0 \to q_1 0\text{Л}$,
$q_1 1 \to q_2 0\text{Л}$,	$q_2 1 \to q_2 1\text{Л}$,	$q_3 1 \to q_3 1\text{П}$,
$q_1 * \to q_0 0$,	$q_2 * \to q_2 * \text{Л}$,	$q_3 * \to q_3 * \text{П}$.

Программа может быть записана в виде таблицы:

Q / A	q_1	q_2	q_3
0	$q_1 0$Л	$q_3 1$П	$q_1 0$Л
1	$q_2 0$Л	$q_2 1$Л	$q_3 1$П
$*$	$q_0 0$	$q_2 *$ Л	$q_3 *$ П

Применим эту машину к слову 11*11:

$$11 * 1q_1 1 \Rightarrow 11 * q_2 10 \Rightarrow 11q_2 * 10 \Rightarrow 1q_2 1 * 10 \Rightarrow q_2 11 * 10 \Rightarrow q_2 011 * 10 \Rightarrow 1q_3 11 * 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11q_3 1 * 10 \Rightarrow 111q_3 * 10 \Rightarrow 111 * q_3 10 \Rightarrow 111 * 1q_3 0 \Rightarrow 111 * q_1 10 \Rightarrow 111q_2 * 00 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11q_2 1 * 00 \Rightarrow 1q_2 11 * 00 \Rightarrow q_2 111 * 00 \Rightarrow q_2 0111 * 00 \Rightarrow 1q_3 111 * 00 \Rightarrow 11q_3 11 * 00 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 111q_3 1 * 00 \Rightarrow 1111q_3 * 00 \Rightarrow 1111 * q_3 00 \Rightarrow 1111q_1 * 00 \Rightarrow 1111q_0 000.$$

Можно проверить, что эта машина осуществляет также следующие преобразования:
$11 * q_1 1 \Rightarrow 111q_0 0$;
$1 * 111q_1 1 \Rightarrow 11111q_0 0$;
$11 * 11q_1 1 \Rightarrow 11111q_0 0$;
$11111 * 1q_1 1 \Rightarrow 1111111q_0 0$.

Как видно, данная машина Тьюринга осуществляет сложение: записывает подряд столько единиц, сколько их было записано по обе стороны от звёздочки до начала работы.

5.1.3 Конструирование машин Тьюринга

Теперь наша задача состоит в следующем. Известно, какое слово в какое должна перерабатывать машина. Требуется написать программу, по которой машина выполняла бы такое действие.
Пример.
Попытаемся построить такую машину Тьюринга, которая из n записанных подряд на ленте единиц оставляла бы $n - 2$ единицы, также записанные подряд, если $n \geqslant 2$, и работала бы вечно, если $n = 0$ или $n = 1$.

В качестве внешнего алфавита возьмём $A = \{0, 1\}$. Количество необходимых внутренних состояний определим по ходу дела.

В начальном состоянии обозревается крайняя справа единица. Начнём с того, что сотрём её и перейдём к обозрению следующей левой ячейки и сотрём там единицу, если она имеется. Очевидно, при этих переходах состояния машины должны меняться, ибо в противном случае мы эдак сотрём вообще все единицы. Таким образом, получаем команды

$$q_1 1 \to q_2 0\text{Л}, \qquad q_2 1 \to q_3 0\text{Л}.$$

Теперь, после стирания этих двух единиц, нужное слово оказалось записанным, машине осталось только перейти в состояние остановки:

$$q_3 1 \to q_0 1, \qquad q_3 0 \to q_0 0.$$

Теперь рассмотрим случаи, когда на ленте не записано ни одной единицы или записана всего одна. Если $n = 0$, то получаем исходную конфигурацию $q_1 0$. Машина должна работать вечно. Этого можно достичь, например, следующей командой:

$$q_1 0 \to q_1 0\text{П}.$$

Если же первоначально была одна единица, то после выполнения первого шага получим $q_2 0$. Бесконечная работа машины может быть достигнута командой

$$q_2 0 \to q_2 0\text{П}.$$

В этом случае, как и в предыдущем, считывающая головка машины будет неограниченно перемещаться вправо.

Полученную программу можно записать в виде таблицы

Q / A	q_1	q_2	q_3
0	$q_1 0$П	$q_2 0$П	$q_0 0$
1	$q_2 0$Л	$q_3 0$Л	$q_0 1$

5.1.4 Вычислимые по Тьюрингу функции

Опр. *Функция называется вычислимой по Тьюрингу, если существует машина Тьюринга, вычисляющая её, то есть такая машина Тьюринга, которая вычисляет её значение для тех наборов значений аргументов, для которых функция определена, и работающая вечно, если функция для данного набора значений аргументов не определена.*

Уточню, что речь идёт о функциях заданных на множестве натуральных чисел (или на его подмножестве) и принимающих также натуральные значения. Значения аргументов функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем записывать на ленте в виде следующего слова: $0\underbrace{1\ldots1}_{x_1}0\underbrace{1\ldots1}_{x_2}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{x_n}$, где под фигурными скобками указано, сколько единиц записано подряд.

Введём обозначения:

$$1^x \equiv \underbrace{1\ldots1}_{x}, \qquad 0^x \equiv \underbrace{0\ldots0}_{x}.$$

Дополнительно полагаем $0^0 = 1^0 = \lambda$ — пустое слово. Так что на слова $1^0 = \lambda$, $1^1 = 1$, $1^2 = 11$, $1^3 = 111, \ldots$ можно смотреть как на "изображения" натуральных чисел 0, 1, 2, 3,… соответственно (в рамках этой книги ноль будем считать натуральным числом). Таким образом, запись аргументов функции на ленте можно представить как

$$01^{x_1}01^{x_2}0\ldots01^{x_n}0.$$

Начинать переработку будем из стандартного начального положения, то есть из такого, при котором в состоянии q_1 обозревается крайняя правая единица. Если функция определена на данном наборе значений, то в конце работы машины на ленте должно быть записано подряд $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ единиц.

Пример
Построим машину Тьюринга, которая вычисляет функцию $f(x) = x/2$. Эта функция определена лишь на множестве чётных чисел. Таким образом, нужно построить машину, которая выдавала бы $x/2$ для чётного x и работала бы неограниченно долго при нечётном x.

В качестве внешнего алфавита возьмём $A = \{0, 1\}$. Работа машины начинается из стандартного начального положения:

$$011\ldots1q_110$$

(число единиц равно x).

Сделаем начало работы таким: машина движется по ленте влево и каждую вторую единицу превращает в ноль. Такое начало обеспечивается командами

$$q_11 \to q_21\text{Л}, \qquad q_21 \to q_10\text{Л}, \qquad q_20 \to q_20\text{Л}.$$

Если число единиц нечётно, то машина, благодаря последней команде, продолжит движение влево неограниченно, то есть будет работать бесконечно. Если же число x чётно, то получим

$$q_10010101\ldots01010,$$

где число единиц равно $x/2$. Теперь остаётся сдвинуть единицы так, чтобы между ними не стояли нули. Будем двигаться вправо до первой единицы и перейдём за единицу:

$$q_10 \to q_30\text{П}, \qquad q_30 \to q_30\text{П}, \qquad q_31 \to q_41\text{П}.$$

Получим

$$001q_40101\ldots01010.$$

Заменим 0, на котором остановились, на 1 и двинемся далее:

$$q_40 \to q_51\text{П}, \qquad q_51 \to q_51\text{П}, \qquad q_50 \to q_60\text{П}, \qquad q_61 \to q_51\text{П}.$$

Получим

$$001110101\ldots01010q_60.$$

Сейчас у нас имеется одна лишняя единица. Поэтому вернёмся к крайней справа единице и сотрём её:

$$q_60 \to q_70\text{Л}, \qquad q_70 \to q_70\text{Л}, \qquad q_71 \to q_80\text{Л}.$$

Получим

$$01110101\ldots01q_80,$$

где число единиц равно $x/2$.

Продвинемся теперь влево на одну ячейку:

$$q_80 \to q_90\text{Л}.$$

И уничтожим самую правую единицу:

$$q_91 \to q_{10}0\text{Л}, \qquad q_{10}0 \to q_{10}0\text{Л}.$$

Получим

$$01110101\dots 0q_{10}100,$$

причём теперь на ленте недостаёт одной единицы.

Теперь продвинемся влево до последней пары 10:

$$q_{10}0 \to q_{11}1Л, \qquad q_{11}0 \to q_{10}0Л.$$

Тогда будем иметь

$$01q_{11}110101\dots 010.$$

Продвинемся вправо до ближайшего нуля и превратим его в единицу:

$$q_{11}1 \to q_{12}1П, \qquad q_{12}1 \to q_{12}1П, \qquad q_{12}0 \to q_{13}1П.$$

Имеем:

$$01111q_{13}10101\dots 010.$$

Число единиц составляет $x/2$. Теперь перешагнём вправо и переведём машину в состояние q_4:

$$q_{13}1 \to q_4 1П.$$

Получим

$$011111q_4 0101\dots 010.$$

Теперь происходит то же самое, что происходило, начиная с конфигурации $01q_4 0101\dots 01$: обозреваемый 0 заменяется на единицу, головка машины движется вправо, крайне правая единица стирается и так далее. В конце концов получаем

$$0111\dots 1q_{13}0,$$

где число единиц составляет $x/2$. Остаётся только перевести машину в состояние q_0:

$$q_{13}0 \to q_0 0Л.$$

Заключительная конфигурация имеет вид

$$0111\dots 1q_0 10.$$

Запишем теперь программу в виде таблицы:

	0	1
q_1	$q_3 0П$	$q_2 1Л$
q_2	$q_2 0Л$	$q_1 0Л$
q_3	$q_3 0П$	$q_4 1П$
q_4	$q_5 1П$	–
q_5	$q_6 0П$	$q_5 1П$
q_6	$q_7 0Л$	$q_5 1П$
q_7	$q_7 0Л$	$q_8 0Л$
q_8	$q_9 0Л$	–
q_9	–	$q_{10} 0Л$
q_{10}	$q_{10} 0Л$	$q_{11} 1Л$
q_{11}	$q_{10} 0Л$	$q_{12} 1П$
q_{12}	$q_{13} 1П$	$q_{12} 1П$
q_{13}	$q_0 0Л$	$q_4 1П$

5.1.5 Правильная вычислимость функций на машине Тьюринга

Опр. *Будем говорить, что машина Тьюринга правильно вычисляет функцию* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$*, если начальное слово* $q_1 0 1^{x_1} 0 1^{x_2} \dots 0 1^{x_n} 0$ *она переводит в слово* $q_0 0 1^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} 0 0 \dots 0$ *и при этом в ходе работы не пристраивает к начальному слову новых ячеек на ленте ни справа, ни слева. Если же функция* f *на данном наборе аргументов не определена, то, начав работать из указанного положения, машина никогда не будет надстраивать ленту слева.*

Пример 1

Составим программу машины Тьюринга, правильно вычисляющей функцию следования $S(x) = x + 1$, то есть осуществляющую преобразование $q_1 0 1^x 0 \to q_0 0 1^{x+1}$. Нетрудно понять, что эта машина может работать по такой, например, программе:

$$q_1 0 \to q_2 0 \text{П}, \quad q_2 1 \to q_2 1 \text{П}, \quad q_2 0 \to q_3 1 \text{Л}, \quad q_3 1 \to q_3 1 \text{Л}, \quad q_3 0 \to q_0 0.$$

Пример 2

Теперь приведём программу машины Тьюринга, правильно вычисляющую нуль-функцию $O(x) = 0$, то есть осуществляющую преобразование $q_1 0 1^x 0 \to q_0 0^{x+1}$:

$$q_1 0 \to q_2 0 \text{П}, \quad q_2 1 \to q_2 1 \text{П}, \quad q_2 0 \to q_3 0 \text{Л}, \quad q_3 1 \to q_3 0 \text{Л}, \quad q_3 0 \to q_0 0.$$

Следующие три машины, строго говоря, не являются "правильно вычисляющими", однако в них крайне важно то, что они также не выходят за пределы отведённого им участка ленты. Все они понадобятся нам в дальнейшем при составлении композиции машин Тьюринга.

Пример 3

Машина "левый сдвиг" Б^- осуществляет преобразование $0 1^x q_1 0 \to q_0 0 1^x 0$, то есть просто перемещает считывающую головку от положения справа от массива единиц к положению слева от того же массива единиц. Нетрудно составить её программу:

$$q_1 0 \to q_2 0 \text{Л}, \quad q_2 1 \to q_2 1 \text{Л}, \quad q_2 0 \to q_0 0.$$

Пример 4

Машина "правый сдвиг" Б^+ осуществляет преобразование $q_1 0 1^x 0 \to 0 1^x q_0 0$, то есть перемещает считывающую головку от положения слева от массива единиц к положению справа от того же массива единиц. Её программа:

$$q_1 0 \to q_2 0 \text{П}, \quad q_2 1 \to q_2 1 \text{П}, \quad q_2 0 \to q_0 0.$$

Пример 5

В дальнейшем нам понадобится машина "транспозиция", которая выполняет следующее преобразование:

$$\text{В}: \qquad 0 1^x q_1 0 1^y 0 \to 0 1^y q_0 0 1^x 0,$$

то есть меняет местами массивы единиц, стоящие справа и слева от неё. Программу этой машины здесь приводить не будем, заинтересованный читатель может попытаться написать её самостоятельно. ВСТАВИТЬ ПРОГРАММУ.

5.1.6 Композиция машин Тьюринга

Опр. *Пусть заданы машины Тьюринга Θ_1 и Θ_2, имеющие общий внешний алфавит $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ и алфавиты внутренних состояний $\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ и $\{q_0, q_1', \ldots, q_t'\}$ соответственно. Композицией или произведением машины Θ_1 на машину Θ_2 называется новая машина Θ с тем же внешним алфавитом $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$, с внутренним алфавитом $\{q_0, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+t}\}$ и с программой, получающейся следующим образом. Во всех командах из программы машины Θ_1, содержащих состояние остановки q_0, последнее заменяется на q_{n+1}, а всё прочее оставляем неизменным. В командах же из Θ_2 состояние q_0 оставляем неизменным, а все остальные состояния q_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ заменяем на q_{n+i}. Совокупность всех полученных таким образом команд и образует программу машины Θ.*

Пример

Построим машины Тьюринга, правильно вычисляющие функции-проекторы $I_m^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$. Для начала рассмотрим случай $n = 3$, $x = 2$, то есть $I_2^3(x_1, x_2, x_3) = x_2$. Требуется, чтобы машина выполняла следующее преобразование: $q_1 01^{x_1}01^{x_2}01^{x_3}0 \to q_0 1^{x_2}00\ldots0$. Для этого будем последовательно применять левый и правый сдвиги Б$^-$ и Б$^+$, транспозицию В и нуль-функцию O:

$$\begin{array}{ll}
 & q_1 01^{x_1}01^{x_2}01^{x_3}0 \\
\text{Б}^+: & 01^{x_1}q01^{x_2}01^{x_3}0 \\
\text{В}: & 01^{x_2}q01^{x_1}01^{x_3}0 \\
\text{Б}^+: & 01^{x_2}01^{x_1}q01^{x_3}0 \\
O: & 01^{x_2}01^{x_1}q00\ldots0 \\
\text{Б}^-: & 01^{x_2}q01^{x_1}00\ldots0 \\
O: & 01^{x_2}q00\ldots0 \\
\text{Б}^-: & q_0 01^{x_2}00\ldots0.
\end{array}$$

Здесь я в большинстве случаев не указываю, в каком состоянии находится машина, поскольку ясно, что для одной машины это будет конечное состояние q_0, а для другой — начальное состояние q_1. Таким образом, искомая машина I_2^3 будет композицией Б$^+$ВБ^+OБ^-OБ$^-$=Б$^+$ВБ$^+(O\text{Б}^-)^2$.

Читатель без труда может получить самостоятельно, что, например, функция-проектор $I_2^2(x_1, x_2) = x_2$ вычисляется композицией Б$^+$ВOБ$^-$.

Теперь рассмотрим общий случай $I_m^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$. Здесь также будем последовательно применять левый и правый сдвиги, транспозицию и нуль-функцию:

$$\begin{array}{ll}
 & q_1 01^{x_1}01^{x_2}0\ldots01^{x_n}0 \\
(\text{Б}^+)^{m-1}: & 01^{x_1}0\ldots01^{x_{m-1}}q01^{x_m}0\ldots01^{x_n}0 \\
\text{В}: & 01^{x_1}0\ldots01^{x_{m-2}}01^{x_m}q01^{x_{m-1}}01^{x_{m+1}}0\ldots01^{x_n}0 \\
(\text{Б}^-\text{В})^{m-2}: & 01^{x_m}q01^{x_1}01^{x_2}0\ldots01^{x_{m-1}}01^{x_{m+1}}0\ldots01^{x_n}0 \\
(\text{Б}^+)^{n-2}: & 01^{x_m}01^{x_1}01^{x_2}0\ldots01^{x_{m-1}}01^{x_{m+1}}0\ldots01^{x_{n-1}}q01^{x_n}0 \\
O: & 01^{x_m}01^{x_1}01^{x_2}0\ldots01^{x_{m-1}}01^{x_{m+1}}0\ldots01^{x_{n-1}}q00\ldots0 \\
(\text{Б}^-O)^{n-2}: & 01^{x_m}q00\ldots0 \\
\text{Б}^-: & q_0 01^{x_m}00\ldots0.
\end{array}$$

Итого получаем машину $(Б^+)^{m-1}В(Б^-В)^{m-2}(Б^+)^{n-2}O(Б^-O)^{n-2}Б^-$ или, в более краткой записи
$$I_m^n = (Б^+)^{m-1}(ВБ^-)^{m-1}(Б^+)^{n-1}(OБ^-)^{n-1}.$$

5.1.7 Тезис Тьюринга (основная гипотеза теории алгоритмов)

Вернёмся к понятию алгоритма. Всякий алгоритм есть единый способ решения всех задач из некоторого бесконечного набора. Определённым начальным данным в условии задачи он сопоставляет определённый ответ. Как начальные данные, так и ответ могут быть описаны словами в некотором алфавите. Тогда алгоритм есть вычисление функции, определённой на множестве слов данного алфавита и принимающей значения также во множестве слов данного алфавита.

Многочисленные исследования и обширный опыт показали, что всякая функция, для вычисления которой существует какой-либо алгоритм, вычислима по Тьюрингу. Это позволяет предположить, что справедлив

Тезис Тьюринга

Для нахождения значений функции, заданной в некотором алфавите, тогда и только тогда существует хоть какой-нибудь алгоритм, когда функция является вычислимой по Тьюрингу, то есть когда она может вычисляться на подходящей машине Тьюринга.

Тезис Тьюринга является предположением и справедлив лишь постольку, поскольку не найдено ни одной функции, для который существовал бы вычислительный алгоритм, но невозможно было бы придумать вычисляющую эту функцию машину Тьюринга. Если когда-нибудь в будущем такая функция будет найдена, мы вынуждены будем признать тезис Тьюринга несправедливым. А пока такая функция неизвестна, можно считать, что все алгоритмы сводятся к программам машины Тьюринга.

5.2 Рекурсивные функции

Теперь зададимся вопросом, какие же функции являются вычислимыми по Тьюрингу. Как описать класс таких функций? Это оказывается возможным сделать с помощью введения понятия о рекурсивных функциях. Сначала выбираются простейшие функции, вычислимость которых очевидна. Затем создаются правила вывода, позволяющие из одних вычислимых по Тьюрингу функций строить другие вычислимые по Тьюрингу функции. Наконец, оказывается возможным доказать, что этот класс функций совпадает с классом функций, вычислимых по Тьюрингу.

5.2.1 Основные понятия теории рекурсивных функций и тезис Чёрча

В настоящем разделе, как и в предыдущем, речь идёт о функциях, определённых на множестве натуральных чисел и принимающих также натуральные значения. Если требуется вычислить функцию от рационального числа, то её можно представить как функцию двух натуральных чисел — числителя и знаменателя дроби. Если же сама функция должна принять рациональное значение, то она заменяется двумя функциями, одна из которых будет числителем, а другая — знаменателем.

В качестве простейших функций выберем следующие:
$S(x) = x + 1$ (функция следования);
$O(x) = 0$ (нуль-функция);
$I^n_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$ (функции-проекторы, $1 \le m \le n$).

Вычислимость этих функций с помощью машины Тьюринга нами уже установлена. В качестве правил вывода новых функций выберем следующие три оператора: оператор суперпозиции, оператор примитивной рекурсии и оператор минимализации.

Опр. *Будем говорить, что n-местная функция φ получена из m-местной функции f и n-местных функций $g_1, g_2, \ldots, g_m$ с помощью оператора суперпозиции, если при всех значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо равенство*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Посмотрим, как строить машину Тьюринга, вычисляющую суперпозицию φ, если известны машины Тьюринга, вычисляющие функции $f, g_1, g_2, \ldots g_m$. Для этого нам потребуется машина Тьюринга, осуществляющая копирование:

$$\text{К}: \qquad q_1 01^x 0 \to q_0 01^x 01^x 0.$$

ВСТАВИТЬ ПРОГРАММУ.

Если $n = m = 1$, то есть $\varphi(x) = f(g(x))$, то

$$\begin{array}{rl} & q_1 01^x 0 \\ G: & q01^{g(x)}0 \\ F: & q_0 01^{f(g(x))}0, \end{array}$$

а машина, вычисляющая функцию φ, будет композицией: $\Phi = GF$.

Теперь рассмотрим более сложный случай: $\varphi(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y))$. Тогда имеем

$$\begin{array}{ll}
 & q_1 01^x 01^y 0 \\
\text{Б}^+: & 01^x q 01^y 0 \\
\text{К}: & 01^x q 01^y 01^y 0 \\
\text{Б}^+: & 01^x 01^y q 01^y 0 \\
\text{К}: & 01^x 01^y q 01^y 01^y 0 \\
\text{Б}^-\text{В}(\text{Б}^+\text{В})^2: & 01^y 01^y 01^y q 01^x 0 \\
\text{КБ}^+\text{К}: & 01^y 01^y 01^y 01^x q 01^x 01^x 0 \\
\text{Б}^-\text{В}(\text{Б}^+\text{В})^2: & 01^y 01^y 01^x 01^x 01^x q 01^y 0 \\
\text{Б}^-: & 01^y 01^y 01^x 01^x q 01^x 01^y 0 \\
G_1: & 01^y 01^y 01^x 01^x q 01^{g_1(x,y)} 0 \\
\text{В}(\text{Б}^-\text{В})^3: & 01^{g_1(x,y)} q 01^y 01^y 01^x 01^x 0 \\
\text{Б}^+(\text{Б}^+\text{В})^2\text{Б}^-: & 01^{g_1(x,y)} 01^y 01^x q 01^x 01^y 0 \\
G_2: & 01^{g_1(x,y)} 01^y 01^x q 01^{g_2(x,y)} 0 \\
\text{ВБ}^-\text{В}: & 01^{g_1(x,y)} 01^{g_2(x,y)} q 01^y 01^x 0 \\
\text{Б}^+\text{ВБ}^-G_3: & 01^{g_1(x,y)} 01^{g_2(x,y)} q 01^{g_3(x,y)} 0 \\
(\text{Б}^-)^2: & q 01^{g_1(x,y)} 01^{g_2(x,y)} 01^{g_3(x,y)} 0 \\
F: & q_0 01^{f(g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y))} 0.
\end{array}$$

Из рассмотренных примеров ясно, что можно построить машину Тьюринга для любой суперпозиции вычислимых по Тьюрингу функций. Единственное, что требуется при этом — чтобы машины $F, G_1, G_2, \ldots$ в ходе работы не надстраивали ленту слева.

Опр. *Говорят, что $(n+1)$-местная функция φ получена из n-местной функции f и $(n+2)$-местной функции g с помощью оператора примитивной рекурсии, если при любых значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ справедливы равенства*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)).$$

Пара этих равенств называется схемой примитивной рекурсии.

Опр. *Функция называется примитивно рекурсивной, если она может быть получена из простейших функций O, S, I_m^n с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.*

Опр. *Будем говорить, что n-местная функция φ получается из $(n+1)$-местных функций f_1 и f_2 с помощью оператора минимализации или оператора наименьшего числа, если для любых значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значение функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равно наименьшему значению переменной y, при котором выполняется равенство $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. Иначе говоря, равенство $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$ выполнено тогда и только тогда, когда функции f_1 и f_2 определены во всех нижеуказанных точках и*

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \neq f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \\ f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) \neq f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) \\ \ldots \\ f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y-1) \neq f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y-1) \\ f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y). \end{gathered}$$

Оператор минимализации называется также μ-оператором и обозначается

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu y[f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)].$$

Опр. *Функция называется частично рекурсивной, если она может быть получена из простейших функций O, S, I_m^n с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимализации.*

Опр. *Если функция частично рекурсивна и всюду определена, то она называется общерекурсивной.*

Теперь вернёмся к вопросу о том, зачем нам понадобилось вводить рекурсивные функции. Мы хотели описать класс всех функций, вычислимых по Тьюрингу. Оказывается, что он полностью совпадает с классом частично рекурсивных функций.

Утверждение

Функция является вычислимой по Тьюрингу $\Leftrightarrow$ она частично рекурсивна.

Желающие познакомиться с доказательством этого утверждения могут найти его в "Математической логике и теории алгоритмов" В. И. Игошина, а здесь доказательство опустим.

Сделанное утверждение позволяет выдвинуть предположение, называемое тезисом Чёрча и равносильное тезису Тьюринга, то есть если тезис Тьюринга справедлив, то справедлив и тезис Чёрча, точно так же опровержение тезиса Тьюринга будет означать опровержение тезиса Чёрча.

Тезис Чёрча

Числовая функция алгоритмически вычислима $\Leftrightarrow$ *она частично рекурсивна.*

5.2.2 Примеры рекурсивных функций

Обсудив основные понятие теории рекурсивных функций, рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1

Введём функцию, которую назовём усечённой разностью:

$$\varphi(x,y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, & \text{если } x \geqslant y, \\ 0, & \text{если } x < y. \end{cases}$$

И посмотрим, является ли эта функция рекурсивной.

Для этого сначала введём функцию одной переменной $\psi(x) \equiv \varphi(x,1) = x \dot{-} 1$.

ЗАДАЧИ

1. Определить, является ли данная последовательность формулой:
   а) $(P_0 \& P_1) P_2 \neg \& P_3$;
   б) $(P_0 \& P_1) \supset P_2$;
   в) $((P_3 \supset P_0) \& \neg P_0) \neg$;
   г) $(((\neg P_0) \supset P_1) \supset \neg (P_2 \vee P_3))$.

2. Выписать все подформулы следующих формул:
   а) $((X_0 \supset X_1) \& (X_2 \supset X_3)) \supset (\neg X_1 \vee X_3)$;
   б) $(X_0 \supset X_1) \supset ((X_0 \supset \neg X_1) \supset \neg X_1)$.

3. Для следующих формул построить таблицы истинности и установить, являются ли они тождественно истинными, выполнимыми, опровержимыми, тождественно ложными:
   а) $\neg(P \supset \neg(Q \& P)) \supset (P \vee R)$;
   б) $(P \& \neg Q \supset Q) \supset (P \supset Q)$;
   в) $(P \supset Q) \vee (Q \supset P)$;
   г) $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$;
   д) $(P \supset Q) \supset ((P \supset (Q \supset R)) \supset (P \supset R))$;
   е) $(P \& Q) \supset P$;
   ё) $P \supset P \vee Q$;
   ж) $(P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset (P \vee Q \supset R))$;
   з) $(Q \supset R) \supset (P \vee Q \supset P \vee R)$;
   и) $\neg P \supset (P \supset Q)$.

4. Доказать равносильности:
   а) $P \wedge (Q \vee R) \equiv P \wedge Q \vee P \wedge R$;

б) $P \vee Q \wedge R \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;
в) $A \to B \equiv \neg A \vee B$.

5. Доказать выполнимость следующих формул без составления таблицы истинности:
а) $(((P \to Q) \to (R \to Q)) \to (R \to P)) \to (P \to Q)$;
б) $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (\overline{R} \to \overline{P})$;
в) $((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \to P \vee R$;
г) $P \wedge Q \to (R \vee Q \to Q \wedge \overline{Q})$.

6. Доказать опровержимость следующих формул:
а) $X \vee Y \vee Z \supset (X \vee Y)\&(Y \vee Z)$;
б) $X \vee Y \supset X'\&Y \vee X\&Y'$.

7. Построить формулу от трёх переменных, которая истинна тогда и только тогда, когда ровно две переменные ложны.

8. Записать составные высказывания в виде формул, употребляя высказывательные переменные для обозначения простых высказываний:
   а) "Чтобы x было нечётным, достаточно, чтобы x было простым";
   б) "Если идёт дождь, то дует ветер".

9. Мальчик решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или кино, а если будет хорошая погода — пойти на реку выкупаться. Запишите формулу с тесными отрицаниями, истинную $\Leftrightarrow$ решение мальчика не выполнено.

10. Преобразовать к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) следующие формулы и установить, какие из них являются тождественно ложными:
    а) $\neg(x \vee y) \wedge (x \to y)$;
    б) $(x \leftrightarrow y) \vee x$;
    в) $\neg(x \to (y \leftrightarrow z))$;
    г) $(\neg x \vee (y \to x)) \leftrightarrow z$;
    д) $(x \leftrightarrow y) \to \neg(y \to x)$;
    е) $\neg(\neg(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y))$;
    ё) $x \to \neg(y \to z)$;
    ж) $(x \to y) \wedge \neg(x \vee y)$;
    з) $(y \to \neg x) \to x$;
    и) $\neg(z \to (x \vee y))$.

11. Преобразовать к конъюнктивной нормальной форме (КНФ) формулы из предыдущей задачи и установить, какие из них являются тождественно истинными.

12. Когда Алиса вошла в Лес Забывчивости, она забыла не всё, а лишь кое-что. Она часто забывала, как её зовут, но особенно ей легко удавалось забывать дни недели. Лев и Единорог частенько наведывались в Лес Забывчивости. Странные это были существа. Лев лгал по понедельникам, вторникам и средам и говорил правду во все остальные дни недели. Единорог же вёл себя иначе: он лгал по четвергам, пятницам и субботам и говорил правду во все остальные дни недели. (*Это предисловие относится и к последующим задачам.*)
    Однажды Алиса повстречала Льва и Единорога, отдыхавших под деревом. Те высказали следующие утверждения.
    Л е в. Вчера был один из дней, когда я лгу.
    Е д и н о р о г. Вчеры был один из дней, когда я тоже лгу.
    Из этих двух высказываний Алиса сумела вывести, какой день недели был вчера. Что это был за день?

13. В другой раз Алиса повстречала одного Льва. Он высказал два утверждения:
    1) Я лгал вчера.
    2) После завтрашнего дня я буду лгать два дня подряд.
    В какой день недели Алиса встретила Льва?

14. В какие дни недели Лев может высказать следующие утверждения:
    1) Я лгал вчера.
    2) Я буду лгать завтра.

15. В какие дни недели Лев может высказать следующее единое утверждение: "Я лгал вчера, и я буду лгать завтра"?

16. Однажды в течение целого месяца Лев и Единорог не появлялись в Лесу Забывчивости. Они где-то пропадали, ведя нескончаемую драку за корону.
Но Траляля и Труляля частенько наведывались в лес. Один из них, как Лев, лгал по понедельникам, вторникам и средам и говорил правду в остальные дни недели. Другой, как Единорог, лгал по четвергам, пятницам и субботам, но во все остальные дни недели говорил правду. Алиса не знала, кто из них ведёт себя как Лев и кто — как Единорог. К тому же братья были так похожи друг на друга, что Алиса даже не могла различить их (воротнички, на которых были вышиты их имена, братья надевали очень редко). Бедняжке Алисе приходилось очень туго! Взять хотя бы следующие случаи. (*Это предисловие относится и к последующим задачам.*)
Однажды Алиса встретила обоих братьев вместе, и они высказали следующие утверждения:
П е р в ы й. Я Траляля.
В т о р о й. Я Труляля.
Кто из них в действительности был Траляля и кто — Труляля?

17. В другой день той же недели братцы высказали следующие утверждения:
П е р в ы й. Я Траляля.
В т о р о й. Если это так, то я Труляля!
Кто из них Траляля и кто Труляля?

18. Как-то Алиса встретила обоих братцев и спросила у одного из них: "Вы лжёте по воскресеньям?" Тот ответил: "Да!" Тогда она задала тот же вопрос другому брату. Что тот ответил?

19. В другой раз братья заявили следующее:
П е р в ы й. 1) Я лгу по субботам. 2) Я лгу по воскресеньям.
В т о р о й. Я буду лгать завтра.
В какой из дней недели это было?

20. Однажды Алиса встретила одного из братцев. Он заявил следующее: "Я лгу сегодня, и меня зовут Труляля".
Кто из братцев встретился Алисе?

21. Предположим, что встреченный Алисой братец заявил: "Я лгу сегодня или я Труляля". Можно было бы в этом случае определить, кто из братьев это был?

22. Однажды Алиса встретила обоих братцев вместе. Они высказали следующие утверждения.
П е р в ы й. Если я Траляля, то он Труляля.
В т о р о й. Если он Труляля, то я Траляля.
Можно ли определить, кто из братьев Траляля и кто Труляля? Можно ли определить, что это был за день недели?

23. В тот знаменательный день Алиса разгадала сразу три трудные загадки. Она набрела на братцев, которые, ухмыляясь, сидели под деревом. Алиса надеялась, что при этой встрече ей удастся разгадать три загадки: 1) установить день недели; 2) выяснить, кто из двух братцев Траляля; 3) определить, ведёт ли себя Траляля, как Лев или как Единорог, когда лжёт (эту загадку ей давно хотелось разгадать). Братцы при виде Алисы высказали следующие утверждения.
П е р в ы й. Сегодня не воскресенье.
В т о р о й. Сегодня понедельник.
П е р в ы й. Завтра — один из тех дней, когда Труляля лжёт.
В т о р о й. Лев лгал вчера.
От радости Алиса захлопала в ладоши. Задача была полностью решена! Какое решение у этой задачи?

24. Каждую из следующих формул преобразовать к виду СКНФ и СДНФ:
а) $(X \to Y) \wedge Z$;
б) $(\overline{Z} \vee Y) \leftrightarrow (Z \wedge \overline{X})$;
в) $(X \supset Y') \sim (X' \sim Y)$;
г) $P \sim \neg(Q \& \neg R)$;
д) $\overline{(X \leftrightarrow \overline{(Z \wedge X)})} \to (Y \vee T)$.

25. Составить формулы со следующими свойствами:
а) формула от трёх переменных, которая принимает то же значение, что и большинство её переменных;
б) формула от четырёх переменных, которая ложна, если хотя бы две из её переменных истинны;
в) формула от трёх переменных, которая истинна ровно в трёх случаях: истинна только первая переменная, истинны только первая и вторая переменная, истинны только вторая и третья переменные;
г) формула от четырёх переменных, которая ложна, если ложны ровно две из её переменных, и истинна в остальных случаях.

26. Сколько существует различных переключательных функций от одного аргумента? Составьте таблицы значений каждой из них.

27. Сколько существует различных переключательных функций от двух аргументов? Составьте таблицы значений каждой из них. Выразите каждую из них через
а) конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;
б) конъюнкцию и отрицание;
в) штрих Шеффера $f|g = \neg(f \wedge g)$;
г) стрелку Пирса $f \downarrow g = \neg(f \vee g)$;
д) функции $+, \wedge, 1$ $(f + g = (f \wedge \neg g) \vee (\neg f \wedge g))$.

28. Построить таблицы значений для следующих переключательных функций:
а) $f(x, y, z) = ((x \to z) \wedge \neg y) \to \neg x$;
б) $f(x, y, z) = ((x \vee \neg y) \to z) \wedge ((x|y) \leftrightarrow \neg z)$;

в) $f(x,y,z) = \neg x \to (x \leftrightarrow (y + x \wedge z))$;
г) $f(x,y,z) = ((((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z)$;
д) $f(x,y,z) = (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \downarrow (x \wedge y \wedge z)$.

29. Построив таблицу значений, выяснить, равны ли следующие переключательные функции:
а) $f(x,y,z) = ((x \vee y) \vee z) \supset ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$,
$g(x,y,z) = x \vee (y \sim z)$;
б) $f(x,y,z) = (\neg x \vee y) \wedge (y \vee z)$,
$g(x,y,z) = (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$;
в) $f(x,y,z) = (x \supset y) \supset z$,
$g(x,y,z) = x \supset (y \supset z)$;
г) $f(x,y,z) = ((x + y) \supset (x \vee y)) \wedge ((\neg x \supset y) \supset (x + y))$,
$g(x,y,z) = x|y$;
д) $f(x,y,z) = ((x \vee \neg y) \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) \vee (z \wedge (y \vee \neg z))$,
$g(x,y,z) = x \vee z$.

30. Проверить справедливость следующих равенств, выражающих свойства дистрибутивности (распределительности) одних переключательных функций относительно других:
а) $(x \supset y) \vee z = (x \vee z) \supset (y \vee z)$;
б) $(x \sim y) \vee z = (x \vee z) \sim (y \vee z)$;
в) $x \supset (y \supset z) = (x \supset y) \supset (x \supset z)$;
г) $x \supset y \wedge z = (x \supset y) \wedge (x \supset z)$.

31. Проверить, что сложение по модулю два (исключающее "или", сумма Жегалкина) обладает следующими свойствами:
а) $x + y = \neg(x \leftrightarrow y)$;
б) $x + y = y + x$;
в) $xy \vee xz \vee yz = xy + xz + yz$ (пояснение: $xy = x \wedge y$);
г) $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$.

32. Доказать, что штрих Шеффера обладает следующими свойствами:
а) $x|1 = x|x = \neg x$;
б) $x|0 = 1$;
в) $\neg(x|y) = (\neg x)|(\neg y)$;
г) $x|(y \vee x) = \neg x$;
д) $(x|x)|(y|y) = x \vee y$.

33. Доказать, что стрелка Пирса обладает следующими свойствами:
а) $x \downarrow x = \neg x$;
б) $x \downarrow y = y \downarrow x$;
в) $x \downarrow 1 = 0$;
г) $x \downarrow 0 = \neg x$;

д) $x \downarrow \neg x = 0$;
е) $x \wedge (x \downarrow y) = y \wedge (x \downarrow y)$.

34. Доказать неполноту следующих систем переключательных функций:
а) $\{\wedge, \vee\}$; б) $\{\rightarrow, \wedge\}$; в) $\{\rightarrow, \vee\}$; г) $\{+, \neg\}$; д) $\{\neg, 1\}$; е) $\{\vee, +\}$;
ж) $\{+, \leftrightarrow\}$; з) $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$; и) $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$; к) $\{\neg\}$; л) $\{\leftrightarrow, \neg\}$.

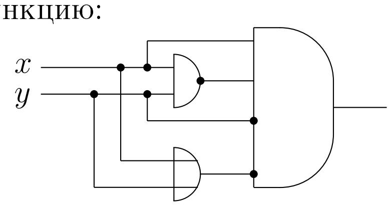
35. Исследовать на полноту системы булевых функций:
а) $\{+, \wedge\}$; б) $\{\rightarrow, +\}$; в) $\{\rightarrow, 1\}$; г) $\{+, 1\}$; д) $\{+, \wedge, 0\}$; е) $\{+, 0, 1\}$;
ж) $\{\wedge, 0, 1\}$; з) $\{\leftrightarrow, \vee, 0\}$; и) $\{\rightarrow, \wedge, 0\}$; к) $\{+, \wedge, \leftrightarrow\}$; л) $\{+, \vee, \leftrightarrow\}$.

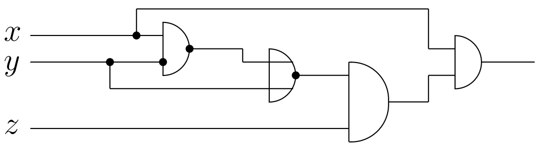
36. Нарисовать переключательные элементы для следующих переключательных функций:

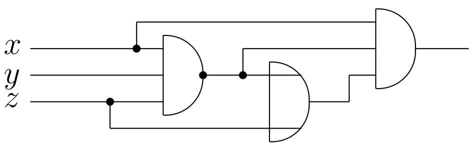
а) $f(x, y, z) = \overline{(x \downarrow y)} \vee (z + y)$;

б) $f(x, y, z) = (x|(z|y)) \wedge \overline{(z \wedge x)}$;

в) $f(x, y, z) = \overline{x} \rightarrow \overline{(y \wedge (x|z))}$.

37. Для каждого из следующих переключательных элементов выписать переключательную функцию:
а)


б)


в)


38. Пусть даны предикаты на множестве целых чисел: $E(x) \equiv$ "x — чётное число", $D(x, y) \equiv$ "y делится на x". Перевести на обычный язык формулу

$$\exists x(E(x) \vee D(6, x)).$$

39. Даны предикаты на множестве натуральных чисел:
$D(x, y) \equiv$ "y делится на x",
$I(x, y) \equiv$ "x равен y",
$P(x) \equiv$ "x — простое число".
Перевести на обычный язык формулу

$$\forall x(\neg I(1, x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge D(y, x))).$$

40. Даны предикаты на множестве натуральных чисел:
$D(x, y) \equiv$ "y делится на x",
$P(x) \equiv$ "x — простое число".
Перевести на обычный язык следующие формулы и определить, истинны ли они:
а) $\forall x(P(x) \to \neg D(2, x))$;
б) $\forall x \forall y(\neg P(x) \to D(x, y))$.

41. Даны предикаты на множестве натуральных чисел:
$D(x, y) \equiv$ "y делится на x",
$G(x, y, z) \equiv$ "z — наибольший общий делитель чисел x и y".
Записать следующие утверждения на языке логики предикатов:
а) "Если x делится на y и y делится на z, то x делится на z";
б) "Если d — наибольший общий делитель a и b, то a и b делятся на d и d делится на любой общий делитель a и b".

42. Определить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, считая что все переменные пробегают множество действительных чисел:
а) $\forall x \exists y(x + y = 7)$;
б) $\exists y \forall x(x + y = 7)$;
в) $\forall x \forall y(x + y = 7)$;
г) $[\forall x \forall y(x + y = 3)] \to (3 = 4)$;
д) $\forall x[(x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \lor (x < 0))]$;
е) $\forall a\{[\exists x(ax = 6)] \leftrightarrow (a \neq 0)\}$;
ё) $\forall b \exists a \forall x(x^2 + ax + b > 0)$;
ж) $\forall x[((x > 1) \lor (x < 2)) \leftrightarrow (x = x)]$;
з) $\exists b \forall a \exists x(x^2 + ax + b = 0)$;
и) $\exists a \forall b \exists x(x^2 + ax + b = 0)$.

43. Из следующих предикатов с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$):
а) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$;
б) $(x - 3)(x + 3) < x^2$;
в) $e^{|x|} < \ln |x| \quad (x \neq 0)$;
г) $(x^2 + 1 = 0) \to ((x = 1) \lor (x = 2))$;
д) $(x < 0) \lor (x = 0) \lor (x > 0)$;
е) $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$;
ё) $\sin x = \sin y$;
ж) $x^2 = y^2 \to x = y$;
з) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
и) $|x - y| \leq 3$;
й) $x^2 = 25$;
к) $x^2 + y^2 = 16$.

44. Пусть переменная x пробегает конечное множество $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Каким высказываниям без кванторов будут эквивалентны в этом случае высказывания $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$?

45. Найти множества истинности следующих предикатов, заданных над указанными множествами:
   а) "x кратно 3", $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
   б) "x кратно 3", $M = \{3, 6, 9, 12\}$;
   в) "x кратно 3", $M = \{2, 4, 8\}$;
   г) "$\sin x > 1$", $M = \mathbb{R}$;
   д) "$x^2 + x - 6 = 0$", $M = \mathbb{R}$;
   е) "$x_1^2 + x_2^2 = 0$", $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$;
   ё) "x_1 делит x_2", $M_1 = M_2 = \{2, 3, 4, 6\}$;
   ж) "$x_1 + x_2 < 0$", $M_1 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $M_2 = \{-3, 1, 2\}$.

46. Изобразить на координатной прямой или на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:
   а) $x < 3$;
   б) $|x| = 4$;
   в) $|x - 4| \geq 1$;
   г) $x = y$;
   д) $x + 3y < 6$;
   е) $xy = 0$;
   ё) $(x > 2) \wedge (x < 2)$;
   ж) $(x > 2) \vee (x < 2)$;
   з) $(x > 2) \leftrightarrow (x < 2)$;
   и) $(x \geq 0) \wedge (y \leq 0)$;
   й) $(x \geq 0) \to (y \leq 0)$;
   к) $(\sin x > 0) \wedge (|x - 2| < 5) \wedge (\lg x > 1)$;
   л) $(x^2 + y^2 > 1) \leftrightarrow (xy < 0)$;
   м) $(|x| > 2) \to (|x| < 3)$.

47. Выяснить, равносильны ли следующие предикаты, если рассматривать их над $\mathbb{R}$, над $\mathbb{Q}$, над $\mathbb{Z}$ или над $\mathbb{N}$:
   а) $5x^2 - 11x + 2 = 0, \quad (x^2 - 3)(3x^2 - 7x + 2) = 0$;
   б) $x^2 - 3/x - \sqrt{3} = x + \sqrt{3}, \quad \cos x \leq 1$;
   в) $\sqrt{x}\sqrt{y} = 15, \quad \sqrt{xy} = 15$;
   г) $2^x 2^y = 4, \quad 2^{x+y} = 4$.

48. Выяснить, является ли один из предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
   а) $|x| < 3, \quad x^2 - 3x + 2 = 0$;
   б) $x^4 = 16, \quad x^2 = -2$;
   в) $x - 1 > 0, \quad (x - 2)(x + 5) = 0$;
   г) $\sin x = 3, \quad x^2 + 5 = 0$;
   д) $\lg x \leq 1, \quad 1 \leq x \leq 10$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Индивидуальная работа 1 (логика высказываний и булевы функции)

Вариант 1

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$((P \supset Q) \supset P) \supset P.$$

2. Доказать равносильность: $\neg(A\&B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{(x \leftrightarrow y) \vee \overline{z}}.$$

4. Выразить дизъюнкцию $\vee$ через штрих Шеффера $|$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$(x \wedge (y \to z)) \vee \overline{z \vee \overline{y}}.$$

Вариант 2

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \supset Q) \supset (Q \supset P).$$

2. Доказать равносильность: $A\&B \vee (A \vee B)\&(\neg A \vee \neg B) \equiv A \vee B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$x \to (y \wedge (z \leftrightarrow x)).$$

4. Выразить эквиваленцию $\sim$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$(x \to \overline{y \vee z}) \wedge z.$$

Вариант 3

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(\neg Q \supset \neg P) \supset ((\neg Q \supset P) \supset Q).$$

2. Доказать равносильность: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A\&\neg B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{x \to y} \to z.$$

4. Выразить штрих Шеффера | через отрицание ¬ и импликацию ⊃.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$\overline{(x \leftrightarrow y) \vee \overline{z}}.$$

Вариант 4

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \supset Q) \vee (P \supset (Q \& P)).$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$P \& \neg Q \vee \neg P \& Q \sim (P \sim Q).$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(x \vee \overline{y}) \leftrightarrow z.$$

4. Выразить конъюнкцию ∧ через отрицание ¬ и импликацию ⊃.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$(z \vee x) \leftrightarrow (z \wedge x).$$

Вариант 5

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$((P \& \neg Q) \supset Q) \supset \neg P.$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$(Q \supset P \& R) \& \neg (P \vee R \supset Q).$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(x \wedge (y \to z)) \vee \overline{z \vee \overline{y}}.$$

4. Выразить сложение по модулю два $+$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$\overline{x \to y} \to z.$$

Вариант 6

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \& Q) \supset Q.$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$\neg(P \supset \neg P).$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{x \leftrightarrow y} \to (z \vee x).$$

4. Выразить функцию Пирса $\downarrow$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$x \to (y \vee \overline{y \wedge z}).$$

Вариант 7

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(\neg P \supset \neg Q) \supset (Q \supset P).$$

2. Доказать равносильность: $A \supset B \equiv \neg A \vee B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{y} \to (x \to \overline{x \vee \overline{y}}).$$

4. Выразить дизъюнкцию $\vee$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$x \to (y \wedge (z \leftrightarrow x)).$$

Вариант 8

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$P \supset (Q \supset P\&Q).$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$\neg((P \sim \neg Q) \vee R)\&Q.$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(x \vee y) \leftrightarrow (y \wedge \overline{z}).$$

4. Выразить импликацию $\supset$ через штрих Шеффера $|$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$(x \wedge y) \vee \overline{z \leftrightarrow y}.$$

Вариант 9

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R)).$$

2. Доказать равносильность: $A \vee \neg A\&B \equiv A \vee B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{x \wedge y} \rightarrow (\overline{z} \wedge y).$$

4. Выразить конъюнкцию $\wedge$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$\overline{x \rightarrow y} \rightarrow (z \vee \overline{x}).$$

Вариант 10

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \supset Q) \vee (P \supset \neg Q).$$

2. Доказать равносильность: $A \supset \neg A \equiv \neg A$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(x \to \overline{y \vee z}) \wedge z.$$

4. Выразить эквиваленцию $\sim$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$(x \vee \overline{y}) \leftrightarrow z.$$

Вариант 11

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(Q \supset (P \& R)) \& \neg((P \vee R) \supset Q).$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$((Q \supset \neg P) \supset P) \supset (P \supset (\neg P \supset Q)).$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(z \vee x) \leftrightarrow (z \wedge x).$$

4. Выразить дизъюнкцию $\vee$ через штрих Шеффера $|$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$\overline{x \leftrightarrow y} \to (z \vee x).$$

Вариант 12

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg P).$$

2. Доказать равносильность: $\neg(A \supset B) \equiv A \& \neg B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{x \to y} \to (z \vee \overline{x}).$$

4. Выразить функцию Пирса $\downarrow$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$(x \vee y) \leftrightarrow (y \wedge \overline{z}).$$

Вариант 13

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P\&(Q \vee \neg P))\&((\neg Q \supset P) \vee Q).$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$(P \supset Q) \supset (Q \supset P).$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(x \wedge y) \vee \overline{z \leftrightarrow y}.$$

4. Выразить штрих Шеффера $|$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$\overline{y} \rightarrow (x \rightarrow \overline{x \vee \overline{y}}).$$

Вариант 14

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$P \supset (Q \supset P).$$

2. Доказать равносильность: $(A \vee B)\&(A \vee \neg B) \equiv A$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$x \rightarrow (y \vee \overline{y \wedge z}).$$

4. Выразить сложение по модулю два $+$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$\overline{x \wedge y} \rightarrow (\overline{z} \wedge y).$$

Вариант 15

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$P \supset (Q \supset P).$$

2. Доказать равносильность: $(A \vee B) \& (A \vee \neg B) \equiv A$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$x \to (y \vee \overline{y \wedge z}).$$

4. Выразить дизъюнкцию $\vee$ через штрих Шеффера $|$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$(x \wedge (y \to z)) \vee \overline{z \vee \overline{y}}.$$

Вариант 16

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$((P \supset Q) \supset P) \supset P.$$

2. Доказать равносильность: $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{(x \leftrightarrow y) \vee \overline{z}}.$$

4. Выразить дизъюнкцию $\vee$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$x \to (y \wedge (z \leftrightarrow x)).$$

Вариант 17

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(\neg P \supset \neg Q) \supset (Q \supset P).$$

2. Доказать равносильность: $A \supset B \equiv \neg A \vee B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{y} \to (x \to \overline{x \vee \overline{y}}).$$

4. Выразить конъюнкцию $\wedge$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$\overline{x \to y} \to (z \vee \overline{x}).$$

Вариант 18

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R)).$$

2. Доказать равносильность: $A \vee \neg A\&B \equiv A \vee B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{x \wedge y} \to (\overline{z} \wedge y).$$

4. Выразить функцию Пирса $\downarrow$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$x \to (y \vee \overline{y \wedge z}).$$

Вариант 19

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P\&Q) \supset Q.$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$\neg(P \supset \neg P).$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{x \leftrightarrow y} \to (z \vee x).$$

4. Выразить эквиваленцию $\sim$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$(x \vee \overline{y}) \leftrightarrow z.$$

Вариант 20

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \supset Q) \vee (P \supset \neg Q).$$

2. Доказать равносильность: $A \supset \neg A \equiv \neg A$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(x \to \overline{y \vee z}) \wedge z.$$

4. Выразить штрих Шеффера $|$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$\overline{y} \to (x \to \overline{x \vee \overline{y}}).$$

Вариант 21

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \& (Q \vee \neg P)) \& ((\neg Q \supset P) \vee Q).$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$(P \supset Q) \supset (Q \supset P).$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(x \wedge y) \vee \overline{z \leftrightarrow y}.$$

4. Выразить дизъюнкцию $\vee$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$x \to (y \wedge (z \leftrightarrow x)).$$

Вариант 22

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$((P \supset Q) \supset P) \supset P.$$

2. Доказать равносильность: $\neg(A\&B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{(x \leftrightarrow y) \vee \overline{z}}.$$

4. Выразить дизъюнкцию $\vee$ через штрих Шеффера $|$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$\overline{x \leftrightarrow y} \to (z \vee x).$$

Вариант 23

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(Q \supset (P\&R))\&\neg((P \vee R) \supset Q).$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$((Q \supset \neg P) \supset P) \supset (P \supset (\neg P \supset Q)).$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(z \vee x) \leftrightarrow (z \wedge x).$$

4. Выразить функцию Пирса $\downarrow$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$(x \vee y) \leftrightarrow (y \wedge \overline{z}).$$

Вариант 24

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg P).$$

2. Доказать равносильность: $\neg(A \supset B) \equiv A\&\neg B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{x \to y} \to (z \vee \overline{x}).$$

4. Выразить импликацию $\supset$ через штрих Шеффера $|$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$(x \wedge y) \vee \overline{z \leftrightarrow y}.$$

Вариант 25

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$P \supset (Q \supset P\&Q).$$

2. Доказать, что следующая формула выполнима, не составляя таблицы истинности, а указав какой-нибудь набор значений высказывательных переменных, при котором она выполняется:
$$\neg((P \sim \neg Q) \vee R)\&Q.$$

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$(x \vee y) \leftrightarrow (y \wedge \overline{z}).$$

4. Выразить штрих Шеффера $|$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:
$$\overline{(x \leftrightarrow y) \vee \overline{z}}.$$

Вариант 26

1. Для следующей формулы построить таблицу истинности и определить, является ли она (формула) тождественно истинной, выполнимой, опровержимой, тождественно ложной:
$$(\neg Q \supset \neg P) \supset ((\neg Q \supset P) \supset Q).$$

2. Доказать равносильность: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A\&\neg B$.

3. Привести следующую формулу к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:
$$\overline{x \to y} \to z.$$

4. Выразить эквиваленцию $\sim$ через отрицание $\neg$ и импликацию $\supset$.

5. Нарисовать переключательный элемент, отвечающий следующей булевой функции:

$$(x \to \overline{y \vee z}) \wedge z.$$

Индивидуальная работа 2 (логика предикатов и машина Тьюринга)

Вариант 1

1. Из предиката $\ln|x| < e^x$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(x = 5) \vee (x + 5 > 3).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$x^2 < y, \quad y \geq 0.$$

4. Построить машину Тьюринга, которая вычисляла бы модуль разности двух чисел.

Вариант 2

1. Из предиката $(\ln|x| < e^x) \supset (x > 0)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(\sin x > 0) \sim (\cos x < \frac{\pi}{2}).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$x^3 < y^3, \quad x < y.$$

4. На ленту записаны подряд n букв α, а сразу за ними — m букв β ($n > 2m$). Построить машину Тьюринга, которая оставит лишь $(n - 2m)$ букв α, а всё остальное сотрёт.

Вариант 3

1. Из предиката $(x \neq 5) \downarrow (8 \sin x = 8)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(18x = \pi) \supset (x^2 + x + 1 = 0).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$\sin x = \sin y, \quad x = y.$$

4. Построить машину Тьюринга, которая вычисляет $[x/3]$ — целую часть от деления x на 3. Советую применить внешний алфавит из трёх знаков: $A = \{0, 1, \alpha\}$, где 0 — пустой символ, α — дополнительный знак, который отсутствует в начале работы.

Вариант 4

1. Из предиката $(x < 3) \wedge (y \neq 8) \sim (xy = 24)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны $(x, y \in \mathbb{R})$.

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(5x + x^2 > 3) \sim (x < 0).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$x = y^2, \quad x > 0.$$

4. На ленте записано подряд $2n$ единиц ($n \geq 1$). Составить программу машины Тьюринга, которая оставляла бы только n-ую единицу, стирая все остальные.

Вариант 5

1. Из предиката $\operatorname{tg} x = e^y$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны $(x, y \in \mathbb{R})$.

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(x > 3) \supset (x < 3).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$8\pi = xy, \quad (x = 8)\&(y = \pi).$$

4. На ленте записано подряд $2n$ единиц ($n \geq 1$). Составить программу машины Тьюринга, которая оставляла бы только n-ую и $(n+1)$-ую единицы, стирая все остальные.

Вариант 6

1. Из предиката $(x^2 - x + 1 = 0) \supset (y - 5 < 0)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны $(x, y \in \mathbb{R})$.

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(8 - x^2 < 5) \sim (x^2 < 11).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$\sin x = \cos x, \quad x = \pi/4.$$

4. На ленте записано слово из нечётного числа единиц. Построить машину Тьюринга, которая будет находить середину этого слова (т. е. останавливаться на $(n+1)$-й единице из $(2n+1)$). Советую применить внешний алфавит из трёх знаков: $A = \{0, 1, \alpha\}$, где 0 — пустой символ, α — дополнительный знак, который отсутствует в начале работы.

Вариант 7

1. Из предиката $(x + y = 8)\&(|x - y| < 9)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны $(x, y \in \mathbb{R})$.

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(5x + x^2 > 3) \sim (x < 0).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$x = y^2, \quad x > 0.$$

4. На ленте записано слово из n единиц $(n > 2)$. Построить машину Тьюринга, которая, начиная работу из стандартного начального положения и заканчивая её в стандартном заключительном положении, оставляет на ленте первую, вторую и последнюю единицы слова, а остальные стирает.

Вариант 8

1. Из предиката $(x = x^2) \vee (8 = 6) \supset (x = 1)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны $(x \in \mathbb{R})$.

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(15x^3 = 5x) \supset (x > -1).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$-5 < x, \quad x < 5.$$

4. Построить машину Тьюринга, вычисляющую $x+3$ в десятичной системе счисления.

Вариант 9

1. Из предиката $|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot (x + y)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x, y \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(x^2 > 5) \supset (x < \sqrt{5}).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$\cos x = \cos y, \quad \sin x = \sin y.$$

4. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $x/4$, если x кратен 4, и работающую вечно в противном случае. Советую применить внешний алфавит из трёх знаков: $A = \{0, 1, \alpha\}$, где 0 — пустой символ, α — дополнительный знак, который отсутствует в начале работы.

Вариант 10

1. Из предиката $(x \neq 5) \downarrow (8 \sin x = 8)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(8 - x^2 < 5) \sim (x^2 < 11).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$\sin x = \cos x, \quad x = \pi/4.$$

4. Построить машину Тьюринга, которая вычисляет $[x/3]$ — целую часть от деления x на 3. Советую применить внешний алфавит из трёх знаков: $A = \{0, 1, \alpha\}$, где 0 — пустой символ, α — дополнительный знак, который отсутствует в начале работы.

Вариант 11

1. Из предиката $(x > 3) \sim (x < 5)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(|x+5|<0) \sim (e^x > 1).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$x^2 = y^2, \quad \cos x = \cos y.$$

4. Построить машину Тьюринга, которая вычисляла бы остаток от деления числа на 7. Начинать и заканчивать работу она должна в стандартном положении.

Вариант 12

1. Из предиката $x^2 - 5x = |x-3|$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(\sin x > 0) \sim (\cos x < \frac{\pi}{2}).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$x^3 < y^3, \quad x < y.$$

4. На ленту записаны подряд n букв α, а сразу за ними — m букв β ($n > 2m$). Построить машину Тьюринга, которая оставит лишь $(n-2m)$ букв α, а всё остальное сотрёт.

Вариант 13

1. Из предиката $(\ln|x| < e^x) \supset (x > 0)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(x > 5)\&(x < 8).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$x^2 \leq 0, \quad x = \sin x.$$

4. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $x/3$, если x кратен 3, и работающую вечно в противном случае. Советую применить внешний алфавит из трёх знаков: $A = \{0, 1, \alpha\}$, где 0 — пустой символ, α — дополнительный знак, который отсутствует в начале работы.

Вариант 14

1. Из предиката $\operatorname{tg} x = e^y$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны $(x, y \in \mathbb{R})$.

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(15x^3 = 5x) \supset (x > -1).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$-5 < x, \quad x < 5.$$

4. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $x/4$, если x кратен 4, и работающую вечно в противном случае. Советую применить внешний алфавит из трёх знаков: $A = \{0, 1, \alpha\}$, где 0 — пустой символ, α — дополнительный знак, который отсутствует в начале работы.

Вариант 15

1. Из предиката $\sin x = \cos y$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны $(x, y \in \mathbb{R})$.

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(|x| < 3) \supset (x < 3).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y, \quad \sin x = \sin y.$$

4. Машине Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$, где 0 — пустой символ, задано слово из чередующихся нулей и единиц (например, 10101010101010101). Написать программу машины, которая, начиная работу из стандартного начального положения и заканчивая её в стандартном заключительном положении, заменяла бы все единицы на нули, а все нули в этом слове — на единицы.

Вариант 16

1. Из предиката $(x + y = 8) \& (|x - y| < 9)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны $(x, y \in \mathbb{R})$.

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(x^2 + x + 1 = 0) \supset (x = 18\pi).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

4. Машине Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$, где 0 — пустой символ, задано слово из чередующихся нулей и единиц (например, 10101010101010101). Написать программу машины, которая, начиная работу из стандартного начального положения и заканчивая её в стандартном заключительном положении, заменяла бы все единицы на нули, а все нули в этом слове — на единицы.

Вариант 17

1. Из предиката $(x = 5) \wedge (y^2 > 16) \sim (|xy| > 20)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x, y \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката $|x+8| \leq 3$.

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$x^2 + 5x - 6 > 0, \quad x + 1 = 1 + x.$$

4. Построить машину Тьюринга, которая вычисляла бы остаток от деления числа на 7. Начинать и заканчивать работу она должна в стандартном положении.

Вариант 18

1. Из предиката $(x < 3) \wedge (y \neq 8) \sim (xy = 24)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x, y \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(x^2 + x + 1 = 0) \supset (x = 18\pi).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

4. На ленту записаны подряд n букв α, а сразу за ними — m букв β ($n > 3m$). Построить машину Тьюринга, которая оставит лишь $(n - 3m)$ букв α, а всё остальное сотрёт.

Вариант 19

1. Из предиката $(x^2 + 2x + 1 = 0) \wedge (x = 3)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(|x| > 2) \supset (|x - 3| < 5).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$x = y^2, \quad x > y^2/2.$$

На ленте записано слово из нечётного числа единиц. Построить машину Тьюринга, которая будет находить середину этого слова (т. е. останавливаться на $(n+1)$-й единице из $(2n+1)$). Советую применить внешний алфавит из трёх знаков: $A = \{0, 1, \alpha\}$, где 0 — пустой символ, α — дополнительный знак, который отсутствует в начале работы.

Вариант 20

1. Из предиката $(x = x^2) \vee (8 = 6) \supset (x = 1)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(x > 3) \supset (x < 3).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$8\pi = xy, \quad (x = 8)\&(y = \pi).$$

4. На ленте записано подряд $2n$ единиц ($n \geq 1$). Составить программу машины Тьюринга, которая оставляла бы только n-ую единицу, стирая все остальные.

Вариант 21

1. Из предиката $\ln|x| < e^x$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката

$$(|x + 5| < 0) \sim (e^x > 1).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:

$$x^2 = y^2, \quad \cos x = \cos y.$$

4. Построить машину Тьюринга, которая вычисляла бы модуль разности двух чисел.

Вариант 22

1. Из предиката $(x > 3) \sim (x < 5)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(x^2 > 5) \supset (x < \sqrt{5}).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$\cos x = \cos y, \quad \sin x = \sin y.$$

4. На ленте записано подряд $2n$ единиц ($n \geq 1$). Составить программу машины Тьюринга, которая оставляла бы только n-ую и $(n+1)$-ую единицы, стирая все остальные.

Вариант 23

1. Из предиката $x^2 - 5x = |x - 3|$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(x > 5)\&(x < 8).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$x^2 \leq 0, \quad x = \sin x.$$

4. На ленте записано слово из n единиц ($n > 2$). Построить машину Тьюринга, которая, начиная работу из стандартного начального положения и заканчивая её в стандартном заключительном положении, оставляет на ленте первую, вторую и последнюю единицы слова, а остальные стирает.

Вариант 24

1. Из предиката $(x^2 - x + 1 = 0) \supset (y - 5 < 0)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x, y \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(18x = \pi) \supset (x^2 + x + 1 = 0).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$\sin x = \sin y, \quad x = y.$$

4. На ленту записаны подряд n букв α, а сразу за ними — m букв β ($n > 3m$). Построить машину Тьюринга, которая оставит лишь $(n - 3m)$ букв α, а всё остальное сотрёт.

Вариант 25

1. Из предиката $|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot (x + y)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x, y \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(|x| > 2) \supset (|x - 3| < 5).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$x = y^2, \quad x > y^2/2.$$

4. Построить машину Тьюринга, которая вычисляет $[x/4]$ — целую часть от деления x на 4. Советую применить внешний алфавит из трёх знаков: $A = \{0, 1, \alpha\}$, где 0 — пустой символ, α — дополнительный знак, который отсутствует в начале работы.

Вариант 26

1. Из предиката $(x^2 + 2x + 1 = 0) \wedge (x = 3)$ с помощью кванторов построить всевозможные высказывания и определить, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in \mathbb{R}$).

2. Изобразить на координатной прямой множество истинности предиката
$$(x = 5) \vee (x + 5 > 3).$$

3. Определить, является ли какой-либо из следующих предикатов, заданных на $\mathbb{R}$, следствием другого:
$$x^2 < y, \quad y \geq 0.$$

4. Построить машину Тьюринга, вычисляющую $x+3$ в десятичной системе счисления.