МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине Дискретная математика для направления подготовки 10.00.00 «Информационная безопасность»

Давыдова Е.М., Мещеряков Р.В.

Томск 2014

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ.

Дисциплина «Дискретная математика» относится к базовой части дисциплин математического и естественнонаучного цикла. Для изучения курса «Дискретная математика» студентам необходимо предварительно освоить дисциплину «Математическая логика и теория алгоритмов».

Знания, полученные студентами при изучении данной дисциплины, используются в дальнейшем при изучении дисциплин профессионального цикла: «Электроника и схемотехника», «Криптографические методы защиты информации», «Безопасность систем баз данных», «Технологии и методы программирования», «Теория информации», «Теоретические основы компьютерной безопасности», «Базы знаний».

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих профессиональных компетенций:

Способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и применять соответствующий физико-математический аппарат для их формализации, анализа и выработки решения (ПК-1).

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- основные понятия теории множеств;
- основные понятия теории автоматов;
- основные дискретные структуры: конечные автоматы, грамматики, графы, комбинированные структуры;
- методы перечисления для основных дискретных структур.

Уметь:

- применять стандартные методы дискретной математики и теории автоматов для решения профессиональных задач;
- решать задачи периодичности и эквивалентности для конечных автоматов;
- оценивать сложность алгоритмов и вычислений.

Владеть:

- навыками построения дискретных моделей при решении профессиональных задач;
- навыками применения языка и средств дискретной математики;
- способами оценки сложности работы алгоритмов.

Поскольку, во время обучения должна формироваться только одна компетенция,

Распределение рабочего времени:

№	Виды учебной работы	Семестр 4	Семестр 5	Всего	Единицы

1.	Всего аудиторных занятий (Сумма 1-4)	56	72	128	часов
2.	Самостоятельная работа студентов (СРС)	16	36	52	часов
3.	Всего (без экзамена) (Сумма 5,7)	72	108	180	часов
4.	Самост. работа на подготовку, сдачу экзамена	не предусмотрено	36	36	часов
5.	Общая трудоемкость (Сумма 8,9)	72	144	216	часов
	(в зачетных единицах)	2	4	6	ЗЕТ

Зачет __4__ семестр Экзамен__5__семестр

СЕМЕСТР 4, СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЙ

Занятие 1. Тема: Компьютерные арифметики (2ч.)

Содержание. Понятия системы счисления. Симметричные и несимметричные системы счисления. Перевод из одной системы счисления в другую. Арифметические операции в любой системе счисления. Представление данных в ЭВМ. Арифметические операции с данными, представленными в ЭВМ в разных видах.

Форма проведения. Решение типовых задач по теме компьютерные арифметики.

Объяснения методов решения задач 20 минут. Решение задач студентами у доски 65 минут. Подведение итогов занятия 5 минут, выдача индивидуального домашнего задания.

Занятие 2.Тема: Множества.

Содержание. Понятие множества. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна. Законы алгебры множеств. Необходимый теоретический материал расположен на стр. 9.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Решение типовых задач у доски 70 минут. 5 минут подведение итогов.

Занятие 3.

Тема: Отношения.

Содержание. Отношения. Операции над отношениями. Свойства отношений. Необходимый теоретический материал расположен на стр.19.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Решение типовых задач у доски 60 минут. Подведение итогов 5 минут. Выдача индивидуального домашнего задания 10 минут. Типовые задания для индивидуальной работы приведены на стр.39.

Занятие 4.Тема: Нечеткая логика (2ч.)

Содержание. Нечеткие множества. Операции над нечеткими множествами. Свойства нечетких множеств. Теоретический материал расположен на стр.25.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Решение типовых задач у доски 60 минут. Подведение итогов 5 минут

Занятие 5.Тема: Логика высказываний.

Содержание. Высказывание. Определение истинности высказывания. Тождества алгебры высказываний. Основные равносильности алгебры высказываний. Теоретический материал расположен на стр.21.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 70 минут. 5 минут подведение итогов.

Занятие 6.Тема: Булевы функции.

Содержание. Способы задания булевых функций. Базис. Равносильные преобразования. Нормальные формы. Теоретический материал расположен на стр.27.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 70 минут. 5 минут подведение итогов.

Занятие 7.Тема: Булевы функции.

Содержание. Минимизация булевых функций. Метод Блейка, метод Квайна, метод Петрика. Карты Карно.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 70 минут. 5 минут подведение итогов.

Занятие 8.Тема: Булевы функции.

Содержание. Самостоятельная работа, решение задач. Закрепление материала предыдущих занятий.

Форма проведения. Решение организационных вопросов 5 минут. Решение задач 85 минут. Выдача индивидуального задания. Примеры заданий приведены на стр. 43.

Занятие 9. Тема: Графы.

Содержание. Задание графов. Операции над графами. Связность графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Деревья.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 70 минут. 5 минут подведение итогов.

Занятие 10. Тема: Графы..

Содержание. Метрики графа. Изоморфизм. Раскраска. Сети Петри. Орграфы.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 70 минут. 5 минут подведение итогов, выдача домашнего задания.

Занятие 11. Тема: Комбинаторика.

Содержание. Сочетания. Перестановки. Размещения. Биноминальные коэффициенты.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Решение типовых задач у доски 70 минут. 5 минут подведение итогов, выдача индивидуального домашнего задания.

Занятие 12. Тема: Кодирование.

Содержание. Алфавитное кодирование. Кодирование с минимальной избыточностью. Помехоустойчивое кодирование. Сжатие данных.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 75 минут.

Занятие 13

Содержание. Обсуждение результатов тестового опроса по курсу «Дискретная математика».

Форма проведения. Собеседование подведение итогов семестра.

Второй семестр.

Занятие 1.

Тема: введение в грамматики.

Содержание. Алфавит. Строка. Операции над строками. Формальный язык. Замыкание Клини.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 65 минут. Выдача индивидуального домашнего задания 10 минут.

Занятие 2.

Тема. Грамматики.

Содержание. Контекстная грамматика. Дерево вывода. Иерархия Хомского. Регулярная грамматика

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 75 минут.

Занятие 3.

Тема. Грамматики.

Содержание. Регулярная грамматика. Регулярное выражение.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 75 минут.

Занятие 4 .

Тема. Конечные автоматы.

Содержание. Разбор регулярных выражений. Минимизация автоматов.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 65 минут. Выдача индивидуального домашнего задания 10 минут.

Занятие 5.

Тема. Контекстно свободная грамматика

Содержание. Приведение к нормальной форме Хомского, Грейбах.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 70 минут. Подведение итогов занятия 5 минут.

Занятие 6.

Тема. Магазинный автомат.

Содержание. Разбор выражений с помощью магазинного автомата.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 70 минут. Подведение итогов занятия 5 минут.

Занятие 7.

Тема. *LL* и *LR* грамматики.

Содержание. Применение грамматик в компиляторах.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 70 минут. Подведение итогов занятия 5 минут.

Занятие 8.

Тема. Цепи Маркова с дискретным состоянием и дискретным временем

Содержание. Граф состояний. Финальные вероятности.

Форма проведения. Опрос студентов – 15 минут. Разбор решения типовых задач у доски 70 минут. Подведение итогов занятия 5 минут.

Занятие 9.

Содержание. Обсуждение результатов тестового опроса по курсу «Дискретная математика».

Форма проведения. Собеседование, подведение итогов семестра.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ АРИФМЕТИКИ

Задачи и упражнения:

1. Переведите 100011001011 из 2 в 10систему счисления.
2. Переведите 9FF3 из 16 в 10 систему счисления.
3. Выполните действия (10001011+1110111)*100 в двоичном коде.
4. Представьте в двоично - десятичном коде число 9572.
5. Выполните действия в восьмеричной системе счисления: (576-1365)*43
6. Переведите 11001001 из 2 в 10 систему счисления.
7. Переведите 10FC из 16 в 10 систему счисления.
8. Выполните действия (10001011*11101)/100 в двоичном коде.
9. Представьте в двоично - десятичном коде число 9572.
10. Выполните действия в двоично - десятичном коде 5689+568:
11. Переведите 1004517 из 8 в 10 систему счисления.
12. Переведите 9FF3 из 16 в 8 систему счисления.
13. Выполните действия (1110101-1110111)*1011
14. Переведите FA1 число из 16 в 12 систему счисления (через десятичную).
15. Запишите число 9457, используя код Грея.
16. Переведите 10023011210031 из 4 в 16 систему счисления.
17. Выполните действия (100110011+110100111)/101 в двоичном коде
18. Переведите число DDF6 в дополнительный код .

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Изучение дискретной математики начинается с изучения понятий «множество», «отношение», «функция», поскольку с помощью этих понятий строятся математические дисциплины. Любое понятие дискретной математики также можно определить с помощью множества.

Понятию «множество» сложно дать точное определение, тем не менее, определим его. Под множеством понимается совокупность объектов, обладающих определенными свойствами. В данном случае определение «множество» дается через свойства его же элементов.

Бурбаки дают следующее определение понятия «множество»: множество строится из некоторых элементов, обладающих определенными свойствами и находящихся в каких-то отношениях между собой и с элементами других множеств.

Объекты, образующие множество, называются элементами множества и обозначаются малыми буквами латинского алфавита $a, b, c, d, \ldots, x, y, z$. Большими буквами латинского алфавита обозначаются сами множества. Если элемент m принадлежит множеству M, то это записывают как $m \in M$, в противном случае $m \notin M$ (элемент m не принадлежит множеству M). Принадлежность нескольких элементов может быть записана $a \in B$, $b \in B$, $c \in B$ или $a, b, c \in B$.

Отношение равенства. Два множества равны, если все их элементы совпадают. Доказывается это утверждение в два этапа:

Каждый элемент множества A является элементом множества B, т. е., если $x \in A$, то $x \in B$.

Обратное утверждение: каждый элемент множества B является элементом множества A, т. е., если $x \in B$, то $x \in A$.

Отношение равенства обладает свойством транзитивности. Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Отношение включения. Множество A называется подмножеством B (A включено в B) тогда и только тогда, когда любой элемент множества A принадлежит множеству B:

$A \subset B \leftrightarrow (a \in A \to a \in B)$ или

$A \subset B \leftrightarrow A = \{a \mid a \in B\}$;

Здесь $\subset$ – знак включения подмножества;

$a \to b$ означает: если a то b;

$a \leftrightarrow b$ означает: b, если и только если a.

Если хотя бы один элемент множества A не является элементом множества B, то множество A не является подмножеством B и это записывается следующим образом: $A \not\subset B$.

Операции над множествами

Основными операциями над множествами являются: объединение – $\cup$, пересечение – $\cap$, вычитание (разность) – \, сумма – $\oplus$ и унарная операция дополнение – $\neg$.

Операция объединения – $\cup$. Объединением двух множеств A и B называется такое множество C, элементы которого состоят из элементов множества A и из элементов множества B.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ и/или $x \in B\}$.

Пусть $C = A \cup B$, тогда, если $x \in C$, то $x \in A$ и/или $x \in B$.

Пример.

Пусть заданы множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Тогда $A \cup B = C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Операция пересечения – $\cap$. Множество C есть пересечение множеств A и B, если каждый элемент множества C является элементом A и B одновременно.

$C = A \cap B = \{ x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

Союз «и» заменяют часто знаком &.

Если $x \in C$, то $x \in A$ & $x \in B$.

Пример.

Если $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, то $C = \{3, 4\}$.

Операция разность – $\setminus$. Разностью множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат A, но не принадлежат B.

$C = A \setminus B = \{ x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Если $x \in C$, то $x \in A$ и $x \notin B$.

Для предыдущего примера

$C = A \setminus B = \{0, 1, 2\}$; $C' = B \setminus A = \{5, 6\}$.

Операция сумма – $\oplus$ (симметрическая разность).

$C = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Если $x \in C$, то x является элементом разности A и B или элементом разности B и A.

$C = A \oplus B = \{x \mid x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A\}$.

Т. е., если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, тогда $C = A \oplus B$ = $= \{1, 2, 6, 7\}$.

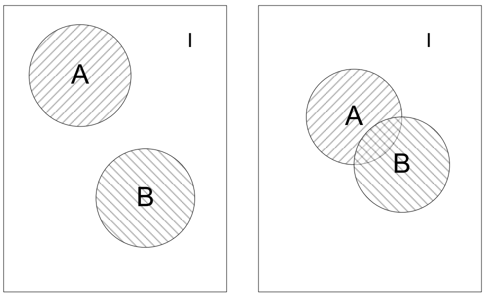
Операция дополнение (одноместная операция). Дополнение A обозначается $\neg A$, $\bar{A}$, A', содержит все те элементы универсального множества I, которые не принадлежат A.

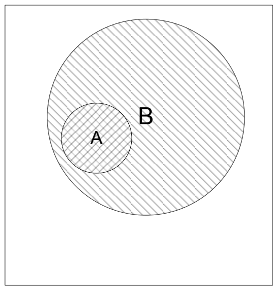
$C = \bar{A} = I \setminus A$.

Пусть $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. $A = \{3, 8, 5, 7, 0\}$. Тогда $\bar{A} = \{1, 2, 4, 6, 9\}$.

Диаграммы Эйлера-Венна

Возможно графическое представление множеств. Универсальное множество задается в виде квадрата, а множества A и B как множества точек плоскости, ограниченные соответствующими замкнутыми линиями. Например: на рисунке 1.1 изображены непересекающиеся (а) и пересекающиеся (б) множества A и B. На рисунке 1.2 показано отношение включения $A \subset B$.





а　　　　　　　　　б

Рисунок 1.1. Пример множеств　　Рисунок 1.2. $A \subset B$

Следующие рисунки демонстрируют результаты выполнения операций над множествами (показаны заштрихованной областью). Диаграммы, приведенные на рисунке 1.3, демонстрируют объединение множеств A и B.

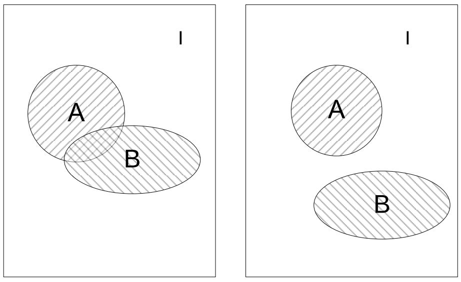
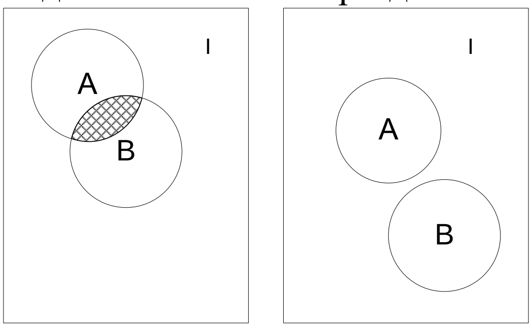


Рисунок 1.3. Объединение множеств $A \cup B$

На рисунке 1.4 приведены примеры пересечения. На рисунке 1.4, а приведены множества, имеющие одинаковые элементы, их пересечение $A \cap B \neq \varnothing$ и случай 1.4 б множества не имеют общих элементов, и их пересечение $A \cap B = \varnothing$.

На рисунках 1.5–1.7 представлены диаграммы Эйлера-Венна, показывающие операции над множествами из раздела 1.1.



а б

Рисунок 1.4. Пересечение $A \cap B$

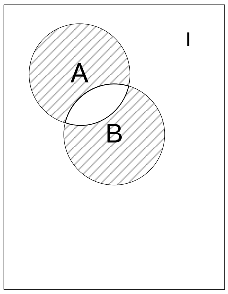


Рисунок 1.5. Сумма $A \oplus B$

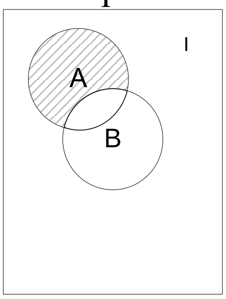


Рисунок 1.6. Разность $A \setminus B$

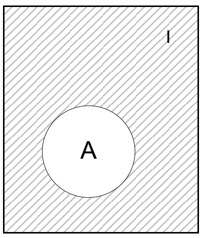


Рисунок 1.7. Дополнение $\bar{A}$

Задачи и упражнения

1.1. Опишите способы задания множеств.

1.2. В чем отличие между понятиями принадлежности множеству и включения в множество?

1.3. Справедливо ли, что $\{1, 2, 3\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$?

1.4. Верно ли, что $\{1, 2, 3\} \subset \{\{1, 2, 3\}, 1, 2, 3, \{1\}\}$?

1.5. Привести пример множеств A, B, C, D, таких что $A \subset B$ и $B \subset C$ и $C \not\subset D$ и $B \subset D$.

1.6. Доказать, что $(A \setminus B) \cup B = A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

1.7. Доказать, что $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ (Доказательство от противного).

1.8. Укажите номера верных записей, если $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$.

а) $1 \in A$; б) $\{2\} \in A$; в) $\{6, 8, 9\} \in A$; г) $\varnothing \in A$?

1.9. Пусть $B = \{a, b, \{c\}\}$. Верно ли, что $a \in B$, $c \notin B$, $\{c\} \in B$, $\{a, b\} \subset B$; $\{b\} \subset B$; $\{c\} \subset B$; $\{\{c\}\} \subset B$?

1.10. Пусть $C = \{+, –, \{+, –\}\}$.

Укажите верные записи: $\varnothing \in C$; $+ \in C$; $\{+, –\} \subset C$; $\{\{+, –\}\} \subset C$; $\{+, –\} \in C$.

1.11. Заданы множества $A = \{1, 2, 9\}$, $B = \{2, 4, 8, 9\}$, $C = \{2, 7, 8, 1\}$ и универсальное множество $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Найти: а) $\hat{A}\cup\bar{A}$; б) $\bar{\tilde{N}}\cup\hat{A}$; в) $\bar{A}\cup\grave{A}$; г) $A\cup B\cup C$.

1.12. Заданы множества $A = \{i, k, l\}$, $B = \{k, d, f, c\}$. Найти $A \cup B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \oplus B$, а также все подмножества A.

1.13. Заданы множества $A = \{7, 6, 9, 4\}$, $B = \{3, 6, 7, 5, 8\}$. Найти $A \cup B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \oplus B$, а также все несобственные подмножества множества A.

1.14. Задано $D = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Верно ли, что $\{\varnothing\} \subset D$, $\varnothing \in D$, $\{\varnothing\} \in D$, $\varnothing \subset D$?

1.15. Заданы множества $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, l, f, k\}$, $C = \{a, c, b, k, l, m, p\}$. Универсальное множество I – множество строчных букв латинского алфавита.

Найти $A\cap\bar{B}$, $C\setminus\bar{B}$, $\bar{A}\cap C\cup B$.

1.16. Задано множество $A = \{l, f, p\}$. Найти его булеан.

1.17. Дано множество $S = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4\}$. Сколько существует подмножеств этого множества не содержащих букв? Сколько существует подмножеств, не содержащих цифр? Сколько существует подмножеств, не содержащих ни букв, ни цифр?

1.18. Какие из утверждений верны для любых A, B и C?

а) если $A \in B$ и $B \in C$, то $A \in C$;

б) если $A \cap B \subseteq C$ и $A \cup B \subseteq C$, то $A \cap C = \varnothing$;

в) если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$;

г) если $A\subseteq\overline{B\cup C}$ и $\hat{A}\subseteq\overline{\grave{A}\cup C}$, то $B=\varnothing$.

1.19. Нарисовать диаграммы Эйлера-Венна:

а) $(A\cup B) \cap (B \cup C) \cup (B \cap \bar{A})$,

б) $A \cap (B \cup I) \cap (C \cap \bar{I}) \cap (A \cup C)$,

в) $(A \cup B) \cap (\bar{C} \cap B) \cap (A \cap B) \cup (C \cap \bar{A})$.

1.20. Нарисовать диаграммы Эйлера-Венна:

а) $(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) \cap (A \cup \overline{B})$,

б) $I \cap (A \cup C) \cap (\overline{B \cap C}) \cup (A \cap (B \cup C))$,

в) $(A \cap B) \cup \left(\overline{A \cap C}\right) \cup (B \cap C)$.

1.21. Нарисовать диаграммы Эйлера-Венна:

а) $(A \oplus B) \cap (A \oplus C)$,

б) $A \oplus \bar{A} \cap \overline{B} \oplus \bar{A} \cap B$,

с) $A \oplus B \oplus A \cap B$.

1.22. Записать формулу по диаграммам Эйлера-Венна.

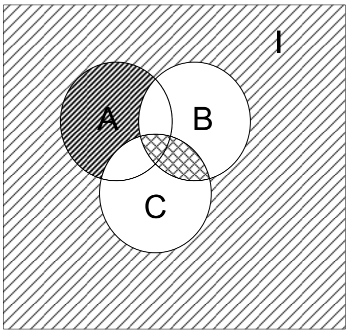


Рисунок 1.8

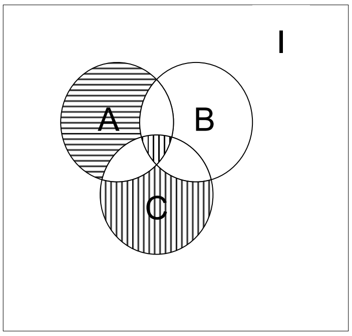


Рисунок 1.9

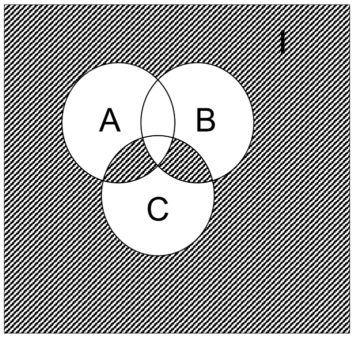


Рисунок 1.10

1.23. Доказать, что $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

1.24. Укажите пустые множества:

а) $A \cup \varnothing$; $\qquad \varnothing \cup \varnothing \cap A$;

б) $A \cap B \cap \varnothing$; $\qquad I \cup \varnothing \cap A$;

с) $(A \cup B) \cap I \cap \varnothing$; $\qquad I \cap \varnothing \cup \varnothing$.

г) $\overline{\grave{A} \cap \varnothing} \cup \overline{\hat{A} \cap I}$ и $\bar{I}$;

д) $\overline{\overline{\grave{A} \cap \bar{\grave{A}}} \cap \overline{\bar{B} \cap B}}$ и I.

1.25. Доказать, что два множества равны тогда и только тогда, когда результаты их объединения и пересечения совпадают.

1.26. Известно, что из 100 студентов живописью увлекаются 28, спортом – 42, музыкой – 30, живописью и спортом – 10, живописью и музыкой – 8, спортом и музыкой – 5, живописью, спортом и музыкой – 3.

Определить количество студентов:

а) увлекающихся только спортом;

б) ничем не увлекающихся.

1.27. Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти баллов получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

1.28. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах, и на коньках?

1.29. Описать в виде множеств:

- виды угроз;
- характер происхождения угроз;
- источники появления угроз;
- причины нарушения целостности информации;
- потенциально возможные злоумышленные действия

для объектов информатизации:

- Сервер в бухгалтерии.
- Почтовый сервер.
- Веб сервер.
- Компьютерная сеть материальной группы.
- Одноранговая локальная сеть без выхода в Интернет
- Одноранговая локальная сеть с выходом в Интернет.
- хранящий конфиденциальную информацию о разработках
- предприятия.
- Материалы для служебного пользования на твердых носителях в
- производстве.
- Материалы для служебного пользования на твердых носителях на
- закрытом
- предприятии.
- Материалы для служебного пользования на твердых носителях в архиве.
- Материалы для служебного пользования на твердых носителях в
- налоговой инспекции.
- Комната для переговоров по сделкам на охраняемой территории.
- Комната для переговоров по сделкам на неохраняемой территории.
- Сведения для средств массовой информации, цензура на различных носителях информации (твердая копия, фотографии, электронные носители и др.).
- Судебные материалы (твердая копия).
- Паспортный стол РОВД.
- Материалы по владельцам автомобилей (твердая копия, фотографии, электронные носители и др.).

ОТНОШЕНИЯ

Понятие отношения используют для обозначения связи между объектами или понятиями.

Декартовым произведением множеств $A \times B$ называют третье множество C, элементами которого служат пары всех элементов множеств A и B, при этом первый элемент берется из множества A, второй – из множества B.

Декартовым произведением n множеств A_1, A_2, …, A_n называют множество $C = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Каждый элемент C рассматривается как упорядоченное множество

$c_i = < a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i >$,

называемое кортежем.

Кортеж состоит из компонент, для которых задается местоположение. Кортеж может иметь одинаковые компоненты. Число компонент кортежа называют его длиной. Два кортежа считаются равными, если их длина одинакова и соответствующие компоненты равны между собой. Компонентами кортежа могут быть любые объекты, в том числе множества и кортежи.

Операции над отношениями

Для бинарных отношений обычным образом определены те-оретико-множественные операции объединения, пересечения и др.

Пусть $R_1 \subset A \times C$ отношение из A в C, а $R_2 \subset C \times B$ – отношение из C в B.

Композицией двух отношений R_1 и R_2 называется отношение $R \subset A \times B$ из A в B, определяемое следующим образом:

$R = R_1 \circ R_2 = \{<a, b>|$ существует C такое, что $<a, c> \in R_1$ и $<c, b> \in R_2\}$.

Обратным отношением для R называется отношение

$R^1 = \{<a, b> \mid <b, a> \in R\}$.

Задачи и упражнения

2.1. Укажите номера всех пар, являющихся элементами отношения:

$a - b = 2$, $a \in A$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in B$, $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

а) 3,1; б) 6,4; в) 4,6; г) 5,3; д) 4,2; е) 7,5; ж) 8,6.

2.2. Найдите элементы множества

$(A \times B) \oplus (B \times A)$, $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$.

2.3. Найдите элементы множеств A и B, если

$A \times B = \{<a, 3>, <a, 8>, <b, 3>, <b, 8>, <k, 3>, <k, 8>\}$.

2.4. Декартово произведение множеств A и B содержит 12 элементов. Известно, что $A = \{a, k, f\}$ и $A \cap B = \varnothing$. Найдите число собственных подмножеств множества B.

2.5. Укажите рефлексивные отношения:

точка a удалена от точки b на 4 см;

$a \leq b$, где a и b – натуральные числа;

$a \neq b$, где a и b – натуральные числа;

a похож на b (в множестве людей);

Петров и Сидоров имеют одинаковый рост;

Смирнов и Васильев живут на третьем этаже;

число a не больше числа b;

поезд a идет быстрее поезда b.

2.6. Укажите симметричные отношения:

лесоруб спилил дерево;

число a не больше числа b, где $a, b \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$;

a равно b;

c старше, чем b;

Таня – сестра Пети;

25 + 10 = 20 + 15.

2.7. Укажите отношения эквивалентности:

автомобиль a столкнулся с автомобилем b;

высота горы a равна высоте горы b;

Иванов задал вопрос Петрову;

$a + b = 100$, где $a, b \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

прямая a перпендикулярна прямой b;

a и b равновеликие треугольники;

фраза a имеет тот же самый смысл, что и фраза b.

2.8. Привести примеры отношений:

не рефлексивного, но симметричного и транзитивного;

не симметричного, но рефлексивного и транзитивного;

не транзитивного, но рефлексивного и симметричного.

2.10. На множестве $A \times A$, где A – множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$ определено отношение R : $<x, y>\ R <u, v>$, такое, что $x + v = y + v$. Доказать, что R – отношение эквивалентности на этом множестве.

2.11. Доказать, что если отношения R_1 и R_2 рефлексивны, то рефлексивны отношения $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$.

2.12. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано отношение $R = \{<1, 2>, <3, 1>, <3, 4>, <4, 4>, <5, 4>\}$. Построить рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкания.

2.13. Постройте отношения на множествах:

–виды угроз;

–характер происхождения угроз;

–источники появления угроз;

–причины нарушения целостности информации;

–потенциально возможные злоумышленные действия.

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Логика высказываний является разделом математической логики, в котором рассматриваются сложные предложения, получающиеся из предложений, принимаемых за элементарные высказывания, соединенных союзами «И», «ИЛИ», «ИЛИ…ИЛИ», «ЕСЛИ…, ТО», «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА» и присоединением к ним частицы «НЕ».

Высказывание – это предложение, которое может оцениваться по его истинности, а не с точки зрения его содержания.

Неделимое высказывание называется элементарным.

Сложные высказывания соединяются логическими связями или связками «И», «ИЛИ», «ИЛИ … ИЛИ», «ЕСЛИ …, ТО», «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА» и частицей «НЕ».

Логика высказываний занимается не смыслом высказывания, а анализирует, истинно оно или ложно.

Про истинное предложение говорят, что его логическим значением является истина, а про ложное – что его логическим значением является ложь.

Смысл операций (связок) устанавливается соответствующими таблицами, поскольку определить операцию – это значит определить истинность высказывания для каждого значения логических переменных.

Отрицание $\neg a$, $\bar{a}$, не a; Ложь обозначим буквой Л, истину – И.

a	$\bar{a}$
Л	И
И	Л

Конъюнкция $a \wedge b$, (a и b), (a & b), (a конъюнкция b). Эту операцию называют логическим умножением.

a	b	$a \wedge b$
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

Пример: 5 > 2 и 7 четное число. Оценим истинность данного высказывания. 5 > 2 – истина; 7 четное число – ложь; в результате исходное выражение ложно.

Дизъюнкция $a \vee b$, (a или b). Операция логического сложения.

a	b	$a \vee b$
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И

Импликация $a \rightarrow b$ (если a, то b).

a	b	$a \rightarrow b$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Эквивалентность $a \sim b$, (a эквивалентно b), (a если и только если b).

a	b	$a \sim b$
Л	Л	И
Л	И	Л

И	Л	Л
И	И	И

6. Дизъюнкция с исключением $a \oplus b$, (или a или b).

a	b	$a \otimes b$
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	Л

3.2. Булевы формулы

Булевыми формулами назовем такие формулы, в которых отсутствуют знаки операций $\rightarrow$; ~; $\oplus$. Рассмотрим основные равносильности булевых формул. Эти равносильности носят название законов. Доказательство законов можно провести с помощью таблиц истинностей. Пусть A, B и C – формулы. Тогда для них справедливы следующие законы:

Коммутативные:

$A \vee B = B \vee A$,

$A \wedge B = B \wedge A$.

Ассоциативные:

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$,

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.

Идемпотентности:

$A \vee A = A$,

$A \wedge A = A$.

Дистрибутивные:

$(A \vee B) \wedge C = A \wedge C \vee B \wedge C$,

$A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Де Моргана:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B},$$

$$\overline{AB} = \overline{A} \vee \overline{B}.$$

Двойного отрицания:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

7. $A \vee \bar{A} =$ И, $\qquad A \wedge \bar{A} =$ Л,

$A \vee$ Л $= A$, $\qquad A \wedge$ Л $=$ Л,

$A \vee$ И $=$ И, $\qquad A \wedge$ И $= A$.

8. $\overline{\text{Ё}} = \text{È}$, $\overline{\text{È}} = \text{Ё}$.

3.5. Задачи и упражнения

3.1. Запишите формулы, используя операции над следующими высказываниями A – идет дождь; B – холодно; C – светло.

если идет дождь, то холодно;

если светло и тепло, то идет дождь;

тепло тогда и только тогда, когда светло;

и тепло и темно;

3.2. Запишите высказывания, которые получаются при применении операций над следующими высказываниями A – идет дождь; B – холодно; C – светло:

$A \vee \bar{A}$;

$B \sim \bar{A}$;

$C \rightarrow B$.

3.2. Запишите высказывания, которые получаются при применении операций над следующими высказываниями A – пасмурно; B – дует ветер; C – идет снег:

$(A \sim C) \vee \bar{A}$;

$(B \wedge C) \sim \bar{A}$;

$C \rightarrow (B \vee A)$.

3.3. Постройте таблицы истинности для следующих высказываний:

$A \rightarrow \bar{A}$;

$B \wedge \bar{A}$;

$C \rightarrow B$.

3.4. Постройте таблицы истинности для следующих высказываний:

$(A \vee C) \rightarrow \bar{A}$;

$C \rightarrow (B \vee A)$;

$(B \sim C) \wedge \bar{A}$.

3.5. Перечислите формулы, которые являются тавтологией, выполнимыми, опровержимыми или противоречием

$(A \sim C) \vee \bar{A}$;

$(B \wedge C) \sim \bar{A}$;

$C \rightarrow (B \vee A)$;

$(A \vee C) \rightarrow \bar{A}$;

$C \rightarrow (B \sim A)$.

3.6. Придумайте высказывания отностительно видов и интерпретаций угроз.

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Двоичная функция двоичного аргумента называется булевой функцией.

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \{0, 1\}$, $y \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$.

Система булевых функций задается следующим образом:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ y_k = f_k(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Будем говорить, что две функции равны, если их значения совпадают на любой комбинации значений переменных.

$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$.

Различными считаются функции, не совпадающие хотя бы на одной комбинации переменных.

Равносильные преобразования формул

Две формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются равносильными. Преобразования, приводящие некоторую формулу к равносильной ей формуле, называются равносильными. Булева формула может быть представлена большим количеством равносильных формул. Некоторые представляют интерес. Например, формулы, содержащие наименьшее число букв, или формулы, содержащие только некоторые символы операций из множества элементарных операций.

Теория булевых функций занимается изучением специальных функций и равносильных преобразований, приводящих к этим функциям.

Основные свойства элементарных формул (основные равносильности):

закон идемпотентности:

$a \vee a = a,\ a \wedge a = a;$

закон коммутативности:

$a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a;$

закон ассоциативности:

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,$

$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c;$

закон дистрибутивности:

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge b \vee a \wedge c,$

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$

закон двойного отрицания:

$\overline{\overline{a}} = a;$

закон де Моргана:

$\overline{a} \vee b = \overline{a \wedge b}, \overline{a} \wedge \overline{b} = \overline{a \vee b};$

законы склеивания:

$a \wedge b \vee a \wedge \overline{b} = a,\ (a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a;$

законы поглощения:

$a \vee a \wedge b = a,\ a \wedge (a \vee b) = a;$

законы Порецкого:

$a \vee \overline{a} \wedge b = a \vee b,\ a \wedge (\overline{a} \vee b) = a \wedge b;$

законы, определяющие действия с константами 0 или 1:

$a \vee = a, \quad a \wedge 0 = 0, \quad a \vee 1 = 1,$

$a \wedge 1 = a, \quad a \vee \overline{a} = 1, \quad a \wedge \overline{a} = 0.$

Правило подстановки: если в равносильных формулах вместо всех вхождений некоторой переменной x подставить одну и ту же формулу, то получатся равносильные формулы.

Правило замены: если в формуле заменить некоторую под-формулу на равносильную, то получится равносильная формула.

Задачи и упражнения

4.1. Построить таблицы функций, реализуемых следующими формулами:

$(x \to y) \oplus (y \to z) \oplus (z \to x)$;

$\overline{(x \vee y)} \vee (x \wedge \overline{z}) \downarrow (x \sim y)$;

$\overline{x} \to (\overline{z} \sim (y \oplus xz))$.

4.2. Выяснить, какие из ниже перечисленных формул являются тождественно истинными или тождественно ложными:

$(x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \vee z))$;

$((x \oplus y) \sim z)\ (x \to y\,z)$;

$((x \vee \overline{y})\ z\ ((x \sim z) \oplus y))\ (x\ (y\ z))$.

4.3. Проверить, справедливы ли следующие соотношения:

$x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;

$x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;

$x \wedge (y \sim z) = (x \wedge y) \sim (x \wedge z)$;

$x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

4.4. Используя основные равносильности, доказать эквивалентность формул A и B:

$A = (x \to y) \to ((x \vee \overline{y}) \oplus (x \sim \overline{y})$, $B = (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$;

$A = x \to (x \wedge y \to ((x \to y) \to y) \wedge z$, $B = y \to (x \to z)$.

4.5. С помощью эквивалентных преобразований привести к виду ДНФ формулу:

$(x_1 \vee x_2\,\overline{x}_3)\ (x_1 \vee x_3)$;

$((x_1 \to x_2x_3)(x_2x_4 \oplus x_3) \to x_1x_4) \vee x_1$.

4.6. С помощью преобразований $A = Ax \vee A\overline{y}$, $A \vee A = A$ перейти от заданной ДНФ к СДНФ.

$x_1 \vee x_2x_3$;

$x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,x_3$;

$x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3$.

4.7. С помощью метода Блейка построить сокращенную ДНФ по заданной ДНФ

$\overline{x}_1\,\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2\,\overline{x}_3x_4$;

$\overline{x}_1\,\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_3x_4$.

4.8. Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана вектором (11111000). Найти её сокращенную ДНФ.

4.9. Построить сокращенную ДНФ используя карты Карно для функций:

$\overline{x}_1\,\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2\,\overline{x}_3x_4$;

$\overline{x}_1\,\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_3x_4$.

4.10. Построить все тупиковые ДНФ для следующих функций:
$f(x_1, x_2, x_3) = (01111110)$;
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1110011000010101)$;
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0110101111011110)$.
4.11. Указать фиктивные переменные функции *f*.
$f(x_1, x_2, x_3) = (11110000)$;
$f(x_1, x_2, x_3) = (00110011)$;
$f(x_1, x_2, x_3) = (00111100)$.

НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Пусть *U* – универсальное множество, *x* – элемент множества *U*, *A* – некоторое свойство. Обычное (четкое) множество *A*, элементы которого удовлетворяют свойству *A*, можно определить с помощью характеристической функции $\chi_{\grave{A}}(\tilde{o})$, которая принимает только два значения 0 и 1, являющихся индикаторами выполнения свойства *A* для конкретных элементов *x* из *U*. В классической теории множеств характеристическая функция редко используется, однако в теории нечетких множеств обобщение этой функции имеет фундаментальное значение, поскольку именно с ней связано базовое определение нечеткого множества. Представим, что характеристическая функция может принимать любое значение в интервале [0, 1]. В соответствии с этим элемент *x* из множества *U* может не принадлежать подмножеству *A* ($\chi_{\grave{A}}(\tilde{o}) = 0$) может быть элементом *A* в небольшой степени ($\chi_{\grave{A}}(\tilde{o})$ близко к 0), может более или менее принадлежать *A* ($\chi_{\grave{A}}(\tilde{o})$ не слишком близко к 0 и не слишком близко к 1), может в значительной степени быть элементом *A* ($\chi_{\grave{A}}(\tilde{o})$ близко к 1) или, наконец, может быть элементом *A* ($\chi_{\grave{A}}(\tilde{o}) = 1$). Таким образом, с помощью функции $\chi_{\grave{A}}(\tilde{o})$, принимающей значения в [0,1], можно более точно оценивать степень выполнения свойства *A* для элементов $\tilde{o} \in U$. В этом случае характеристическая функция $\chi_{\grave{A}}(\tilde{o})$ носит название функции принадлежности.

Понятие нечеткого множества впервые ввел Заде Л. следующим образом: пусть *U* – есть множество, счетное или нет, и $\tilde{o} \in U$. Нечетким подмножеством *A* множества *U* называется множество упорядоченных пар

$A = \{(x / \mu_A(x))\}$,

где $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, принимающая свои значения в линейно упорядоченном множестве *M* и определяющая степень принадлежности элемента *x* к подмножеству *A* или, иными словами, степень выполнения свойства *A* для элементов из *U*. Наряду с термином «нечеткое подмножество» используется также термин «нечеткое множество». Чтобы задать нечеткое множество *A* нужно определить универсальное множество *U*, множество принадлежностей *M* и функцию принадлежности $\mu_{\grave{A}} : U \to M$.

Если $M = \{0, 1\}$, то нечеткое подмножество превращается в обычное подмножество универсального множества U. Обычно в качестве M рассматривается отрезок [0, 1] или множество чисел из отрезка [0, 1], при этом если $A=\varnothing$, то $\forall \tilde{o} \in U(\mu_A(x)=0$; если $A=U$, то $\forall \tilde{o} \in U(\mu_A(x)=1$. Нечеткое подмножество отличается от обычного тем, что степень принадлежности элемента множеству может быть любым числом из [0, 1]. Это свойство обеспечивает возможность теоретико-множественного представления реальных неточных понятий, в которых переход от непринадлежности к принадлежности происходит постепенно. Возможность формализации понятий такого типа необходима при разработке баз знаний для систем искусственного интеллекта.

Задачи и упражнения

5.1. Выпишите множество всех нечетких подмножеств для случаев

а) $U = \{x_1, x_2\}$, $M = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$;

б) $U = \{x_1, x_2, x_3\}$, $M = \{a, b, c\}$ ($a < b < c$).

5.2. Доказать

$A \cap (A \cup B) = A$;

$A \cup (A \cap B) = A$;

$\varnothing \subset A \cap \bar{A} \subset A \cup \bar{A} \subset U$;

$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$;

5.3. Докажите следующие свойства операций над нечеткими множествами

$A \otimes (B \cap C) = (A \otimes B) \cap (A \otimes C)$,

$A \otimes (B \cup C) = (A \otimes B) \cup (A \otimes C)$,

$A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$,

$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$.

5.4. Пусть на универсальном множестве $U = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ заданы нечеткие подмножества

$A = \{(a/0), (b/0.3), (c/0.7), (d/1), (e/0), (f/0.2), (g/0.6)\}$;

$B = \{(a/0.3), (b/1), (c/0.5), (d/0.8), (e/1), (f/0.5), (g/0.6)\}$;

$C = \{(a/1), (b/0.5), (c/0.5), (d/0.2), (e/0), (f/0.2), (g/0.9)\}$.

Найти выпуклую комбинацию нечетких множеств при $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$.

K-ЗНАЧНАЯ ЛОГИКА

Всюду в этой главе число k предполагается натуральным большим 2. Через E_k обозначается множество $\{0, 1, \ldots, k–1\}$. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функцией k-значной логики, если на всяком наборе $\tilde{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $a_i \in E_k$, значение $f(a_1,$

$a_2, \ldots, a_n) \in E_k$. Совокупность всех функций k-значной логики обозначается через P_k.

Очевидно, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полностью определена, если задана ее таблица (см. таблицу 9.1). В этой таблице наборы суть разложения в k-ичной системе счисления чисел $0, 1, \ldots, k^n - 1$. Символ f здесь будет интерпретироваться как символ, обозначающий отображение, характеризуемое таблицей, а символы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – как названия столбцов.

Таблица

x_1	x_2		x_i		x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	…	0	…	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	…	0	…	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
			…				…
0	0	…	0	…	0	k–1	$f(0, 0, \ldots, 0, k-1)$
0	0	…	0	…	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
			…				…
k–1	k–1	…	k–1	…	k–1	k–2	$f(k-1, k-1, \ldots, k-1, k-2)$
k–1	k–1	…	k–1	…	k–1	k–1	$f(k-1, k-1, \ldots, k-1, k-1)$

Задачи и упражнения

Пример 1.

Докажите справедливость неравенства

$-(\overline{x}) = \sim x$.

Доказательство:

$\overline{x} = x + 1 (\mathrm{mod}\, k)$;

$-(\overline{x}) = -(x + 1 (\mathrm{mod} k))$;

получаем 2 случая:

а) получаемое число становится менее нуля,

из определения разности по модулю k:

$-(\overline{x}) = k - ((x + 1(\mathrm{mod} k)) - 0) = k - (x + 1) = k - x - 1.$

б) получаемое число становится равным нулю,

$-(\overline{x}) = -(0 + 1(\mathrm{mod} k)) = -1 = k - 1.$

С другой стороны: $\sim x = (k - 1) - x$.

Таким образом, в случаях а) и б) формулы приобретают одинаковые значения, что и требовалось доказать.

Пример 2.

Для $k = 3$ представить функцию $f = \overline{x}$ в первой и второй формах (полученные выражения упростить)

Для представления функции в первой форме:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{\tilde{\sigma}} \left\{ \min(f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n), J_{\sigma_1}(x_1), J_{\sigma 2}(x_2), \ldots, J_{\sigma_n}(x_n) \right\},$$

$$\bar{x}=\max\{\min(\bar{0},J_0(x)),\min(\bar{1},J_1(x)),\min(\bar{2},J_2(x))\}$$
$$=\max\{\min(1,J_0(x)),\min(2,J_1(x)),\min(0,J_2(x))\}.$$

Для представления функции во второй форме:

$$f(\tilde{x}^n)=\sum_{\tilde{\sigma}} f(\tilde{\sigma})\cdot j_{\sigma_1}(x_1)\cdot j_{\sigma 2}(x_2)\cdot\ldots\cdot j_{\sigma n}(x_n)$$
$$\bar{x}=\bar{0}\cdot j_0(x)+\bar{1}\cdot j_1(x)+\bar{2}\cdot j_2(x)=1\cdot j_0(x)+2\cdot j_1(x)+0\cdot j_2(x)=j_0(x)+2\cdot j_1(x).$$

9.1. Докажите справедливость следующих неравенств

$x_1\supset x_2=\sim(x_1\div x_2)$;

$x_1\div(x_1\div x_2)=\min(x_1,x_2)$;

$(x_1\supset x_2)\supset x_2=\max(x_1,x_2)$;

$(x_1\supset x_2)+\bar{x}_1=\min(x_1,x_2)$;

$x_1\div x_2=x_1-\min(x_1,x_2)$;

$x_1\div x_2=\max(x_1,x_2)-x_2$;

$(\sim x_1)\div(x_2\div x_1)=\sim\max(x_1,x_2)$;

$(\sim x_1)\div(\sim x_2)=x_2\div x_1$;

$\sim(\bar{x}_1+x_2)=(\sim x_1)+(\sim x_2)$;

$\overline{\sim(\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2)}=(\sim x_1)\cdot\bar{x}_2$;

$\max((x+2)\div 1,J_{k-2}(x))=\bar{x}$;

$\min(\sim J_{k-1}(x),(k-2)\supset x)=\bar{x}$;

$\bar{x}_1\div\bar{x}_2=(x_1\div x_2)+\bar{x}_1\cdot j_{k-1}(x_2)+\bar{x}_2\cdot j_{k-1}(x_1)$;

$v_k(x_1,x_2)+\bar{x}_1\cdot j_{k-1}(x_2)+\bar{x}_2\cdot j_{k-1}(x_1)=\max(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$;

$\overline{\max(x_1,x_2)}+j_0(x_2\div x_1)+j_k(x_1)\cdot x_2=\max(\bar{x}_1,x_2)$;

$\overline{\min(x_1,x_2)}+J_0(x_2\div x_1)-j_{k-1}(x_1)\cdot x_2=\min(\bar{x}_1,x_2)$;

$J_0(\max(J_0(x),J_1(x),\ldots,J_{k-2}(x)))=J_{k-1}(x)$;

$J_1(\max(x,1,J_1(x),J_2(x),\ldots,J_{k-2}(x)))=J_0(x)$;

$x\cdot j_0(j_1(x))+j_0(x)\cdot\overline{j_1(x)}=x+j_0(x)-j_1(x)$;

$J_0(x\div i)\div J_0(x\div(i-1))=J_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, k-1$.

9.2. При каких значениях k ($k\geq 3$) функции x^2, x^3 и x^4 попарно различны?

9.3. Для заданного k представить функцию f в первой и второй формах (полученные выражения упростить)

$f=\sim x$, $k=4$;

$f=-j_0(x)$, $k=5$;

$f=2J_1(x)$, $k=6$;

$f=J_2(x^2+x)$, $k=5$;

$f = (\sim x)^2 + x$, $k = 4$;
$f = 3j_1(x) - j_3(x)$, $k = 4$;
$f = x_1 + 2x_2$, $k = 3$;
$f = \max\,(x_1, x_2)$, $k = 3$;
$f = x_1 \div x_2^{\,2}$, $k = 3$;
$f = x_1^{\,2} \cdot x_2$, $k = 3$.

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика является разделом дискретной математики, в котором рассматриваются исследование дискретных конечных математических структур. Задачи обычно оцениваются с точки зрения размера, т. е. общего количества различных вариантов, среди которых нужно найти решение, а алгоритмы оцениваются с точки зрения сложности. При этом различают сложность по времени (или временную сложность), т. е. количество необходимых шагов алгоритма, и сложность по памяти (или емкостную сложность), т. е. объем памяти, необходимый для работы алгоритма.

Во многих случаях возникает необходимость подсчитать количество возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным условиям. Такие задачи называют комбинаторными. Разнообразие комбинаторных задач не поддается исчерпывающему описанию, но среди них есть целый ряд особенно часто встречающихся, для которых известны способы подсчета.

Задачи и упражнения

7.1. Определите примерные значения $U(m, n)$, $A(m, n)$, $C(m, n)$, $V(m, n)$ при

2

7.2. Используя формулу Стирлинга определите $n!$ при следующих значениях n: 35, 58, 130.

7.3. Определите произведение подстановок следующих подстановок:

а) $f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, $\quad g = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

б) $f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $\quad g = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

7.4. Найдите обратную подстановку для следующих подстановок

$f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, $\quad g = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

КОДИРОВАНИЕ

Вопросы кодирования издавна играли заметную роль в математике.

Пример.

1. Десятичная позиционная система счисления – это способ кодирования натуральных чисел. Римские цифры – другой способ кодирования натуральных чисел, причем гораздо более наглядный и естественный: палец – I, пятерня – V, две пятерни – X. Однако при этом способе кодирования труднее выполнять арифметические операции над большими числами, поэтому он был вытеснен позиционной десятичной системой.

2. Декартовы координаты – способ кодирования геометрических объектов числами.

Ранее средства кодирования играли вспомогательную роль и не рассматривались как отдельный предмет математического изучения, но с появлением компьютеров ситуация радикально изменилась. Кодирование буквально пронизывает информационные технологии и является центральным вопросом при решении самых разных (практически всех) задач программирования:

представление данных произвольной природы (например, чисел, текста, графики) в памяти компьютера;

защита информации от несанкционированного доступа;

обеспечение помехоустойчивости при передаче данных по каналам связи;

сжатие информации в базах данных;

составление текста программы.

Не ограничивая общности, задачу кодирования можно сформулировать следующим образом. Пусть заданы алфавиты $A = \{a_i, ..., a_n\}$, $B = \{b_i, ..., b_m\}$ и функция $F\colon S \to B^*$, где S – некоторое множество слов в алфавите A, $S \subset A^*$. Тогда функция F называется кодированием, элементы множества S – сообщениями, а элементы $\beta = F(\alpha)$, $\alpha \in S$, $\beta \in B^*$ – кодами (соответствующих сообщений). Обратная функция F^{-1} (если она существует!) называется декодированием.

Если $|B| = m$, то F называется m-ичным кодированием. Наиболее распространенный случай $B = \{0,1\}$ – двоичное кодирование.

Задачи и упражнения

8.1. Является ли схема алфавитного кодирования

$<a \to 0, b \to 10, c \to 011, d \to 1011, e \to 1111>$

префиксной? разделимой?

8.2. Построить оптимальное префиксное алфавитное кодирование для алфавита $\{a, b, c, d\}$ со следующим распределением вероятностей появления букв:

$p_a = 1/2, p_b = 1/4, p_c = 1/8, p_d = 1/8.$

8.3. Показать, что для несимметричных ошибок функция

$$d_\delta(\beta',\beta'')=2\min_{\{\beta'''\in B^*\}}\max\left(\min_{\{E^\delta\langle\beta',\beta'''\rangle\}}\left|E^\delta\langle\beta',\beta'''\rangle\right|,\ \min_{\{E^\delta\langle\beta''',\beta''\rangle\}}\left|E^\delta\langle\beta''',\beta''\rangle\right|\right)$$

является расстоянием.

8.4. Проследить работу алгоритма сжатия Лемпела-Зива на примере следующего исходного текста: abaabaaab.

8.5. Пусть в системе программирования имеются процедура Randomize, которая получает целочисленный параметр и инициализирует датчик псевдослучайных чисел, и функция без параметров Rnd, которая выдает следующее псевдослучайное число в интервале [0, 1]. Составить алгоритмы шифровки и расшифровки с закрытым ключом.

ГРАФЫ

Понятие графа опирается на понятие множества. Графически задается множество и элементы множества, находящиеся между собой в некотором отношении.

Объект, состоящий из двух множеств (множества точек и множества линий), которые находятся между собой в некотором отношении, называется графом.

Точки обозначают $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $|X| = n$ и называют вершинами графа.

Множество линий, соединяющих пары вершин (x_i, x_j), где $x_i, x_j \in X$, называется множеством ребер или дуг (необходимо отметить, что в литературе имеются разночтения по использованию терминов), и обозначается $U = \{u_1, u_2,\ldots, u_m\}$, $|U| = m$.

Графом можно считать объект, который обозначается как $G = (X, U)$.

Задачи и упражнения

9.1. Начертить граф для отношения «a есть делитель b».

9.2. Какие из правильных многогранников имеют гамильтоновы цепи и циклы?

9.3. Пусть задан передатчик, который может передавать пять сигналов: a, b, c, d, e . При приеме каждый из этих сигналов может быть истолкован двояко: сигнал a как p или q, сигнал b как q или r, сигнал c как r или s, сигнал d как s или t, сигнал e как p или t. Какое наибольшее число сигналов можно принять, не рискуя спутать их друг с другом?

9.4. Показать, что граф, имеющий мост, не может быть эйлеровым.

9.5. Постройте схему алгоритма выделения из графа суграфа и подграфа с заданным числом ребер.

9.6. Для полного графа с 4 вершинами постройте все покрывающие неизоморфные деревья

9.7. Постройте произвольный мультиграф $G=(X,U)$, $|X|=n$, $|U|=m$, $N=8$, $m=14$. Определите его мультичисло.

9.8. Постройте граф $G=(X,U)$, $|X|=n$, $|U|=m$, $n=7$, $m=13$. Задайте его с помощью матриц смежности и инциденций. Постройте схему алгоритма перехода от одной матрицы к другой.

9.9. Подсчитайте число суграфов, включая изоморфные, в графе $G=(X,U)$, $|X|=n$.

9.10. Предложите методы построения графов с эйлеровыми и гамильтоновыми циклами на заданных наборах вершин и ребер.

9.11. Предложите алгоритм построения двудольных графов с заданным числом вершин.

9.12. Постройте произвольный граф $G=(X,U)$, $|X|=n$, $|U|=m$, $n=10$, $m=18$. Определите его цикломатическое число. Укажите, какие ребра должны быть удалены из графа, чтобы он стал ациклическим.

9.13. Определите хроматическое число неполного связного графа $G=(X, U)$, $|X|=n$, $|U|=m$. $n=8$, $m=18$.

9.14. Определите множество полных графов, содержащих одновременно эйлеровы и гамильтоновы циклы.

9.15. Доказать, что среди любых 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.

9.16. Описать в терминах теории графов отношение эквивалентности на конечном множестве.

9.17. Доказать, что если граф связен и конечен, то поиск в ширину и поиск в глубину обойдут все его вершины по одному разу.

9.18. Доказать, что граф связен тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде объединения двух графов.

9.19. Нарисовать диаграммы всех деревьев с 7 вершинами.

9.20. Доказать, что полный граф имеет n^{n-2} деревьев.

9.21. Построить примеры графов, для которых алгоритм последовательного раскрашивания строит не минимальную раскраску.

9.22. Построить все возможные ориентированные деревья с 5 узлами.

9.23. Доказать, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину.

9.24. Доказать, что удаление одного ребра, которое принадлежит какому-то циклу связного графа, не делает этот граф несвязным.

9.25. Построить сеть Петри для двух процессов, разделяющих один ресурс.

9.26. Построить сеть Петри для решения задачи о 5 мудрецах. (5 мудрецов. Могут есть или думать. Для еды им даны 5 палочек. Чтобы поесть, мудрецу нужны 2 палочки).

9.27. Определить число неизоморфных деревьев двудольного графа $K_{2,3}$.

9.28. «Три дома три колодца». Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу. Доказать.

9.29. Построит матрицы смежности и инцидентности для правильных многогранников.

9.30. Показать, что вершина x принадлежит кратчайшей цепи между a и b тогда и только тогда, когда $d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)$.

9.31. Определить радиусы и диаметры для графов правильных многогранников.

9.32. Задача о разделении. Два человека имеют полный кувшин вина в 8 литров, а также два пустых кувшина в 5 и в 3 литра. Как они могут разделить вино поровну.

ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ И ГРАММАТИКИ

Любой конечный механизм задания формального языка называется грамматикой. Грамматика содержит набор правил, которые могут использоваться для вывода одной строки из другой путем замены подстрок.

Существует два типа грамматик: порождающие и распознающие. Под порождающей грамматикой языка L понимается конечный набор правил, позволяющий построить все «правильные» предложения языка L и ни одного неправильного. Распознающая грамматика задает критерий принадлежности произвольной цепочки символов данному языку. Роль распознающей грамматики может выполнить конечный автомат.

В настоящем методическом пособии рассмотрим проблемы касающиеся задания языков и грамматик разного типа.

Введем основные определения, необходимые для изучения фор-мальных языков, к которым относятся языки программирования.

Предложения и операнды программы строятся из последовательности символов. Под символами понимаются буквы и знаки. Любое множество символов (не обязательно конечное и счетное) называется алфавитом.

Грамматика образует наиболее важный класс генераторов языка. Грамматика – это математическая система, определяющая формальный язык. В грамматике, следуя Хомскому, определяющей язык L, используется два конечных множества символов – множество нетерминальных (вспомогательных) символов (N) и множество терминальных символов (T). Из терминальных символов образуются слова (цепочки, предложения) определенного языка. Будем придерживаться соглашений:

прописными буквами латинского алфавита обозначаем нетерминальные символы языка;

строчными – терминальные символы языка;

строчными буквами греческого алфавита обозначаем цепочки символов;

символ $\rightarrow$ используется для обозначения отношения «определяется как», | обозначает или.

Выражение вида $A \rightarrow d$ означает A определяется как d, и называют правилом вывода или правилом продукций. Такого типа выражения определяют подстановки, которые можно производить при построении той или иной конструкции языка.

Контекстная грамматика может быть представлена совокупностью четырех объектов

$G = (N, T, P, S)$,

где N – конечное множество нетерминальных символов;

T – конечное множество терминальных символов, причем $N \cap T = \varnothing$;

P – конечное множество правил продукций вида $\alpha \rightarrow \beta$. Где α – строка в левой части продукций такая, что $\alpha \in (N \cup T)^{+}$, а β – строка в правой части продукций $\beta \in (N \cup T)^{*}$;

S – начальный символ грамматики. $S \in N$.

Задания и упражнения

10.1. Найдите все суффиксы, префиксы и подстроки строки: 111001.

10.2. Пусть $L1$ и $L2$ два формальных языка. $L1 = \{\varepsilon, b, a, c\}$, $L2 = \{\varepsilon, a, b\}$. Вычислить: $L2L2L1 \setminus (L1 \cup L2)$.

10.3. Постройте контекстно свободную грамматику, которая порождает следующий язык:

– все строки – элементы множества $\{a, b\}$, такие, что в каждой из них после символа а стоит два символа b;

– все строки – элементы множества $\{a, b\}$, такие, что после a всегда следует не менее однго b;

– правильно построенные логические выражения, включающие операции отношения.

10.4. Постройте контекстно свободную грамматику, которая порождает следующий язык:

$L=\{a^k bc^m \mid k,\ m>=1\} \cup \{ab^k c \mid k>=1\}$

10.5. Задана контекстно свободная грамматика $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A, B\}$, $T=\{a, b\}$,

P: $S \rightarrow bA|aB \quad A \rightarrow a|aS|bAA \quad B \rightarrow b|bS|aBB$.

Построить схему вывода сентенции: $babaab$, и дерево разбора.

10.6. Задана грамматика $G = (N, T, P, S)$, построить ε-сво-бодную грамматику.

$S \rightarrow A(A)|BB \quad A \rightarrow a|C|bAa \quad B \rightarrow bC|aAc \quad C \rightarrow a|b|c|\varepsilon$.

10.7. Задана грамматика $G = (N,T,P,S)$, имеющая правила продукций: $S \rightarrow \xi|AB|BC$; $AB \rightarrow AbB|BC|a$; $BC \rightarrow BcC|C|b$; $C \rightarrow BC|c$.

Привести ее к нормальной форме Хомского.

10.8. Запишите порождающие правила грамматики, генерирующей регулярное выражение $(a + c)^{*}abc$.

13.9. Покажите, что грамматика, имеющая продукции

$S \rightarrow bA|aB$;

$A \rightarrow a|aS|bAA$;

$B \rightarrow b|bS|bBB$,

неоднозначна.

10.10. Докажите: Лемму 1. Пусть S $\alpha_0 \Rightarrow \alpha_1$ $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$ $\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3$. … $\alpha_{n\text{-}1} \Rightarrow \alpha_n$ вывод цепочки α_n из S в контекстной грамматике $G = (N, T, P, S)$, тогда в G можно построить дерево вывода D, для которого α_n крона, а $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ некоторые из крон сечения.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Теория конечных автоматов в математическом и инженерном изложении несколько различаются. Разница в точках зрения математика и инженера состоит в том, что первый рассматривает конечный автомат как модель алгоритма переработки слов в конечном алфавите с конечной памятью, а второй – как модель устройства, реализующего этот алфавит. На этапе абстрактного синтеза всегда строится модель алгоритма (абстрактный автомат), которая и является также и описанием поведения устройства, реализующего этот алгоритм. Математик оперирует понятием Шага алгоритма, а инженер, переходя к этапу структурного синтеза, т. е. к рассмотрению автомата как физического устройства, вынужден вводить механизмы, обеспечивающие пошаговую работу автомата.

Абстрактный автомат

Математической моделью дискретного устройства является абстрактный автомат, определяемый как шестикомпонентный вектор $S = (A, Z, W, q, y, a_1)$, у которого:

1. $A = \{a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_M\}$ – множество состояний (алфавит состояний);

2. $Z = \{z_1, \ldots, z_f, \ldots, z_F\}$ – множество входных сигналов (входной алфавит);

3. $W = \{w_1, \ldots, w_g, \ldots, w_G\}$ – множество выходных сигналов (выходной алфавит);

4. $q : A \times Z \rightarrow A$ – функция переходов, реализующая отображение $D_q \subseteq A \times Z$ в A. Функция q некоторым парам состояние – входной сигнал (a_m, z_f) ставит в соответствие состояние автомата $a_s = q(a_m, z_f)$, $a_s \in A$;

5. $y : A \times Z \rightarrow W$ – функция выходов, реализующая отображение $D_y \subseteq A \times Z$ на W. Функция y некоторым парам состояние – входной сигнал (a_m, z_f) ставит в соответствие состояние автомата $w_g = y(a_m, z_f)$;

6. $a_1 \in A$ – начальное состояние автомата.

Под алфавитом здесь понимается непустое множество попарно различимых символов. Автомат работает в дискретном времени, принимающем целые неотрицательные значения: $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. В каждый момент дискретного времени t автомат находится в некотором состоянии $a(t)$

из множества состояний автомата. В начальный момент времени $t = 0$ автомат находится в состоянии a_1.

В момент t будучи в состоянии $a(t)$ автомат способен воспринять на входе букву входного алфавита $z(t) \in Z$. В соответствии с функцией выходов он в тот же момент времени t выдаст букву выходного алфавита $w(t) = y(a(t), z(t))$ и в соответствии с функцией переходов перейдет в следующее состояние $a(t+1) =$
$= q(a(t), z(t))$

На практике наибольшее распространение получили два класса автоматов – автоматы Мили и Мура.

Закон функционирования автомата Мили задается уравнениями:

$a(t + 1) = q(a(t), z(t)), w(t) = y(a(t), z(t))$, $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

а закон функционирования автомата Мура – уравнениями:

$a(t + 1) = q(a(t), z(t)), w(t) = y(a(t)), t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Функция выходов $y(t)$ автомата Мура определяется только его внутренними состояниями.

Автомат называется конечным, если конечны множества A, Z, W. Автомат называется полностью определенным, если $D_q = D_y = A \times Z$. У неполностью определенного (частичного) автомата области определения функций q или y определены не для всех пар $(a_m, z_f) \in A \times Z$.

Для того, чтобы задать конечный автомат $S = (A, Z, W, q, y, a_1)$ необходимо описать все компоненты, т. е. входной, выходной алфавиты. Алфавит состояний, а также функции переходов и выходов. Среди множества состояний автомата, необходимо выделить начальное состояние.

Задачи и упражнения

11.1. Постройте модель автомата, продающего кофе.

Кофе с сахаром стоит 14 рублей, без сахара – 13. Автомат принимает купюры по 10 рублей и монеты по 1, 2 и 5 рублей.

11.2. Запишите порождающие правила грамматики, генерирующей регулярное выражение и автомат, принимающий строки:

а) $(aa+c^*)(abc^*)^*$;

б) $(a^*+c^*)(abc^*)\, abc^*$;

в) $(a+c)^*ac^*$.

11.3. Опишите и постройте конечный автомат, который будет принимать вещественные числа, заданные в экспоненциальной форме $\pm d^*.d^+E \pm d^+$.

11.4. Пусть $M = (\{k_1, k_2, k_3\}, \{a, b\}, t, k_1, \{k_3\})$ – недетерминированный конечный автомат, $t(k_1, a) = \{k_2, k_3\}$, $t(k_2, a) = \{k_1, k_2\}$, $t(k_3, a) = \{k_1, k_3\}$, $t(k_1, b) = \{k_1,\}$, $t(k_2, b) = \varnothing$, $t(k_3, b) = \{k_1, k_2\}$. Постройте автомат, определите недетерминированный конечный автомат так, чтобы все строки из $T(M)$ были им приняты.

11.5. Найдите регулярное выражение, соответствующее множеству $T(M)$, где M – недетерминированный конечный автомат, определенный в упражнении 14.4.

11.6. Определите детерминированный конечный автомат, который принимает строки.

а) $a(ba + b)^{*} + b$;

б) $(ab + b^{*})^{*}\ b\ a + b$;

в) $((b^{*}a)^{*}\ ab^{*})^{*}$.

11.7. Определите, какой из построенных автоматов упражнения 11.6 является минимальным.

11.8. Постройте магазинный автомат для распознавания цепочек:

а) $\{1^{n}0^{m}|\ n > m > 0\}$

б) $\{1^{n}0^{m}|\ n \geq m > 0\}$

в) $\{1^{n}0^{m}|\ m \geq n > 0\}$

11.9. Пусть входная строка имеет вид 012345, S – стек. Какая из следующих строк может быть получена в результате последовательного применения операций "занесение в стек" и "извлечение из стека".

а) 543210, б) 534210, в) 431250, г) 415320, д) 542301.

11.10. Постройте недетерминированный магазинный автомат, принимающий язык, порождаемый грамматикой, имеющей продукции вида:

$S \rightarrow aA|aBB$

$A \rightarrow Ba|Sb$

$B \rightarrow bAS|\xi$.

11.11. Написать программу для машины Тьюринга, умножающей два числа в унарной арифметике.

Примеры индивидуальных заданий

Множества

Вариант № 1

1. Укажите все элементы множества $X=\{x\in A \mid x<10$ и A – множество простых чисел$\}$.

2. Сколько элементов в следующих множествах: $\{d, f, u, df, ff\}$, $\{1, 3, 4, 11, 34\}$, $\{e, 4, ju, 7, 6\}$, $\{1, 11, 111, 1\}$, $\{a, d, b, a, f, r\}$?

3. Дано множество $A=\{a, b, c, f, h\}$. Укажите верные записи: 1) $a \in A$, 2) $c \subset A$, 3) $\varnothing \in A$, 4)$\{a, b, h\} \in A$, 5)$\{f, h\} \subseteq A$.

4. Доказать, что $A\subset B$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$.

5. Укажите верные утверждения $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cap(B\cup C)$, $A\oplus B\oplus T=A\oplus B$, $A\oplus T\oplus T=A\oplus T$.

Вариант № 2

1. Сколько элементов в следующих множествах: $\{x \mid x \geq 1,\ x \leq 4\}$, $\{rt, y, rt, tr, tt\}$, $\{2, 4, 6, 1+1, 1+3\}$, $\{\leftarrow, \uparrow, \downarrow, \rightarrow, \rightarrow\rightarrow, \leftarrow, \downarrow\uparrow\}$?

2. Дано универсальное множество $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и множества A, B, C. $A=\{1, 2, 3, 4, 7\}$, $B= \{3, 5, 4, 6\}$, $C= \{7, 4, 6, 8\}$. Проиллюстрировать графически: $(\bar{A}\cup \overline{B})\cap C$.

3. Дано множество $\mathrm{A}=\{a, b, c, f, h\}$. Укажите верные записи: 1) $\varnothing \subset A$, 2) $\{a, b, c, f, h\} \subseteq A$, 3) $\{a\}\subset\{a, b\}$, 4) $A \subseteq \{a, b, c, f, h\}$.

4. Доказать, что $A\cup B=B$, тогда и только тогда, когда $A\cap B= A$.

5. Упростить $A\cap\overline{B}\cup A\cap\overline{B}\cap C\cup A$, $A\cap B\cap\overline{C}\cup A\cap B\cap C\cup A\cap C$.

Вариант № 3

1. Записать множества A, B, C перечислением их элементов и найти: $A\cup B$, $A\cap C$, $(A\cup B)\cap C$, $A\cap B\cap C$, если:

A – множество делителей числа 12; B – множество корней уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$; C – множество нечетных чисел x таких, что $3 \leq x \leq 12$.

2. Сколько элементов в следующих множествах: $\{a, b, c, ac\}$, $\{1, r, 6, 6r, 11\}$, $\{\aleph, \Re, \wp, \Im, \Re, \Re\aleph\}$, $\{A, B, P, O, E, HE\}$?

3. Дано множество $A=\{a, b, c, f, h\}$. Укажите верные записи: 1) $\{c\}\in\{a, c, f\}$, 2) $\varnothing \subset A$, 3) $\{a, c\}\subset \{b, c, \mathrm{f}\}$, 4) $\varnothing \in \{a, c, h\}$.

4. Доказать, что $A \cap B = A$, тогда и только тогда, когда $A\backslash B = \varnothing$.

5. Чему равны выражения, если $A = B = C = T$, где T – универсальное множество.

$A\cap B\cap\bar{E}\cup\bar{E}\cap B$; $A\cap\overline{B}\cup C\cup E$.

Вариант № 4

1. Укажите все элементы множества $X = \{x|\ x = 2n,\ n$ – натуральное число и $n < 5\}$.

2. Дано универсальное множество $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$и два подмножества $R = \{2\}$ и $Q = \{2, 3, 8, 6\}$. Изобразите эти множества при помощи диаграмм Эйлера-Венна.

3. Известно, что $A\subset B$ и $a\in A$. Какие из записей верны: 1) $a\subset A$, 2) $\{a\}\subset B$, 3) $a\notin B$, 4) $\{a\}\subset A$?

4. Доказать, что $A\cap B=A$, тогда и только тогда, когда $A\subset B$.

5. Упростить, если $A\subset B$, $B = C$, $\overline{(A\cup B\cap\overline{\overline{C}})}$, $\overline{\overline{(A\cup\overline{(\overline{B}\cap C)})}}$.

Вариант № 5

1. Укажите все элементы множества $X=\{x\ |x=2n,\ n$ – неотрицательное целое число и $n<5\}$.

2. Дано универсальное множество $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$и два подмножества $R=\{2\}$ и $Q=\{2, 3, 8, 6\}$. Укажите элементы, не входящие в множество $Q\backslash R$.

3. Даны три множества A, B, C и $a\in A$. Укажите верные утверждения. 1) $a \subset B$, 2) $a\in A\cup B$, 3) $a\in A\cap C$, 4) $\{a\}\in A\cup B\cup C$.

4. Доказать, что $A\subset B$ тогда и только тогда, когда $A\backslash B = \varnothing$.

5. Упростить, если $C=T$ и $D = \varnothing$,

$(A\cup B)\cap(C\cup D)$; $\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cup B\cap C\cap D$.

Графы

Вариант № 1

1. Задан граф $G = (X, U)$,

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $U = \{(1, 4), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (2, 3), (1, 3), (2, 5), (4, 6), (3, 4), (6, 8), (5, 6), (4, 8), (1, 9), (9, 3), (2, 7), (7, 6), (4, 3), (7, 7), (3, 7)\}$.

Нарисуйте его, дайте полную характеристику: связность, циклы, цепи, маршруты, ориентированность, постройте матрицу расстояний, задайте матрицей смежности.

2. Постройте минимальное покрывающее дерево для графа, заданного таблицей:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	2	5	0	3	1	0
2	2	0	2	1	0	0	5
3	5	2	0	3	1	0	0
4	0	1	3	0	0	2	1
5	3	0	1	0	0	3	5
6	1	0	0	2	3	0	0
7	0	5	0	1	5	0	0

Здесь нулем кодируется отсутствие смежности вершин, цифрой – вес соответствующих ребер.

3. Постройте схему алгоритма выделения из графа суграфа и подграфа с заданным числом ребер.

Вариант № 2

1. Задан граф $G = (X, U)$,

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $U = \{(2, 4), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (5, 3), (1, 3), (2, 5), (4, 6), (3, 4), (6, 8), (5, 6), (1, 9), (9, 3), (5, 7), (7, 1), (3, 7)\}$.

Нарисуйте его, задайте матрицей смежности, постройте подграф, суграф, плоский и планарный графы.

2. Задан граф $G = (X, U)$; $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $U = \{<x_1, x_2>, <x_1, x_3>, <x_2, x_3>, <x_2, x_4>, <x_3, x_4>, <x_3, x_5>, <x_4, x_1>, <x_4, x_5>, <x_5, x_2>\}$. Построить его графическое представление и матрицы инциденций и смежности, рефлексивное, транзитивное и симметричное замыкания.

3. Для полного графа с 4 вершинами постройте все покрывающие неизоморфные деревья.

Вариант № 3

1. Задан граф $G = (X, U)$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $U = \{(2, 4), (2, 8), (2, 7), (3, 6), (2, 3), (1, 3), (2, 5), (4, 6), (5, 6), (4, 8), (1, 9), (9, 3), (1, 7), (7, 4), (3, 7)\}$.

Нарисуйте его, двойственный ему граф, дайте полную характеристику (связность, циклы, ориентированность, матрица расстояний и т. д.), задайте матрицей инциденций.

2. Задан граф $G = (X, U)$; $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; $U = \{<x_1, x_2>, <x_1, x_3>, <x_2, x_3>, <x_2, x_4>, <x_3, x_4>, <x_1, x_4>, <x_4, x_4>\}$. Постройте его, задайте матрицей смежности, определите, является ли заданный граф эйлеровым.

3. Постройте произвольный мультиграф $G = (X, U)$, $|X| = n$, $|U| = m$, $N = 8$, $m = 14$, определите его мультичисло.

Вариант № 4

1. Задан граф $G = (X, U)$.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $U = \{(1, 4), (2, 7), (3, 6), (2, 3), (1, 3), (2, 5), (4, 6), (3, 4), (5, 6), (2, 7), (3, 7), (6, 7), (1, 5)\}$.

Нарисуйте его, двойственный ему граф, постройте граф, изоморфный исходному, матрицу расстояний, задайте списком смежности. Определите, является ли он двудольным.

2. Задан граф $G = (X, U)$; $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_4), (x_4, x_5)\}$. Построить его графическое представление и матрицы инциденций и смежности, все простые цепи и циклы.

3. Постройте граф $G = (X, U)$; $|X| = n$; $|U| = m$; $n = 7$; $m = 13$. Задайте его с помощью матриц смежности и инциденций. Постройте схему алгоритма перехода от одной матрицы к другой.

Вариант № 5

1. Задан граф $G = (X, U)$,

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $U = \{(1, 4), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (2, 3), (1, 3), (2, 5), (6, 8), (5, 6), (1, 9), (9, 3), (2, 7), (7, 7), (3, 7)\}$.

Нарисуйте его, двойственный ему граф, дайте полную характеристику (связность, циклы, ориентированность, матрица расстояний, хроматическое число), задайте матрицей смежности.

2. Задан граф $G = (X, U)$; $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $U = \{<x_1, x_2>, <x_1, x_3>, <x_2, x_3>, <x_2, x_4>, <x_3, x_4>, <x_3, x_5>, <x_4, x_1>, <x_4, x_5>, <x_5, x_2>\}$. Построить его графическое представление и матрицы инциденций и смежности, определить является ли граф сильносвязным.

3. Подсчитайте число суграфов, включая изоморфные, в графе $G = (X, U)$, $|X| = n$.

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Вариант № 1

1. Построить таблицу истинности функции, реализуемую следующей формулой:

$(x \to y) \oplus ((y \to z) \sim (\bar{z} \vee x))$.

Привести к виду ДНФ, используя алгебраические преобразования.

2. Задана булева функция. Получить СДНФ, используя разложение Шеннона.

$x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$

3. Задана булева функция.

$f = x_1 \bar{x}_2 x_5 \vee x_1x_2x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_5 \vee x_2x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5$.

Построить карту Карно.

4. Минимизировать, используя метод Блейка и метод Петрика.

$f = x_1x_= \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_2 x_3x_4 \vee x_1x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$.

5. Минимизировать, используя карты Карно. Задана КНФ булевой функции.

$f = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_5)$.

Вариант № 2

1. Построить таблицу истинности функции, реализуемую следующей формулой:

$((x \wedge y) \vee z) \oplus (z \to x)$.

Привести к виду ДНФ, используя алгебраические преобразования.

2. Задана булева функция. Получить СДНФ, используя разложение Шеннона.

$f = x_1x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$.

3. Задана булева функция от 5 переменных. Построить карту Карно.

$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4 \vee x_1x_2x_4\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_2x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_3}\,x_4\overline{x_5}$.

4. Минимизировать, используя метод Квайна и метод Петрика.

$f = x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3x_4 \vee x_1x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}\,x_4$.

5. Минимизировать, используя карты Карно.

$f = \overline{x_1}\,x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4x_5 \vee$
$\vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\overline{x_5} \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_3}\,x_4x_5 \vee x_1x_2\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5$.

Вариант № 3

1. Построить таблицу функции, реализуемую следующей формулой: $(x \oplus \overline{y}) \wedge (x \vee z)$. Привести к виду ДНФ, используя алгебраические преобразования.

2. Получить СДНФ функции $f = (xy\overline{z} \vee \overline{x}yz) \to (x \vee y)$.

3. Используя карты Карно, сравнить две функции:

$f_1 = x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3x_4 \vee x_1x_3\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$.

$f_2 = x_1 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,x_3x_4$.

4. Минимизировать, используя метод Квайна и метод Петрика.

$f = x_1x_2\overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,x_3 \vee x_1x_3\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$.

5. Минимизировать, используя карты Карно.

$f = x_1x_2\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,x_3\overline{x_5} \vee x_2x_3x_5 \vee x_2x_3\overline{x_5} \vee x_2\overline{x_3}\,x_5$.

Вариант № 4

1. Построить таблицу функции, реализуемую следующей формулой: $\overline{((\overline{x} \oplus y) \vee (x \sim z))}$. Привести к виду ДНФ, используя алгебраические преобразования.

2. Минимизировать, используя метод Квайна и метод Петрика. $f = x_1x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1}\,x_3x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$.

3. Представить функцию в виде вершин n – мерного куба.

$f = x_1x_2 \vee \overline{x_1}\,x_2\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_2}\,x_3x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x_3}$.

4. Минимизировать, используя карты Карно.

$f = x_1x_2\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,x_3\overline{x_5} \vee x_2x_3x_5 \vee x_2x_3\overline{x_5} \vee x_2\overline{x_3}\,x_5$.

5. Получить СДНФ $(ac \vee \overline{a}\,\overline{b}) \to (b \sim ac)$.

Вариант № 5

1. Построить таблицу функции, реализуемую следующей формулой: $(\overline{y} \to (z \wedge x)) \oplus (x \vee y)$. Привести к виду ДНФ, используя алгебраические преобразования.

2. Представить функцию в векторном виде.

$$f = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 x_5 \vee$$
$$\vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_3}\,\overline{x_4} x_5.$$

3. Минимизировать, используя метод Блейка и метод Петрика.

$$f = x_1 x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4.$$

4. Найдите СДНФ: $f = (x_1 \to x_2) \oplus x_2 \overline{x_3}$.

5. Минимизировать функцию, используя карты Карно

$$f = (x_1 x_2 \vee x_4 \overline{x_5}) \wedge (x_3 \overline{x_4} \to x_5).$$

Регулярные грамматики

Вариант № 1

Найдите все суффиксы, префиксы и подстроки строки: 020200.

Пусть L_1 и L_2 два формальных языка. $L_1 = \{1, 23, 2\}$, $L_2 = \{\varepsilon, 2, 3\}$.Вычислить: L_1L_2, L_1^3, $L_1 \cap L_2$.

Задана контекстно свободная грамматика $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$,

P: $S \to bA|aB$, $A \to a|aS|bAA$, $B \to b|bS|aBB$.

Построить схему вывода сентенции: *baaabb* , дерево разбора, семантическое дерево и все сечения дерева.

Постройте контекстно свободную грамматику, которая порождает следующий язык:

Все строки – элементы множества $\{a, b\}$, такие, что в каждой из них после символа a стоит два символа b.

Задана грамматика $G=(N, T, P, S)$, построить ε-свободную грамматику.

$S \to bA|aB$, $A \to a|aS|bAC$, $B \to b|bS|aAB$, $C \to a|b|c|\varepsilon$.

Вариант № 2

Найдите все суффиксы, префиксы и подстроки строки: 111001

Пусть L_1 и L_2 два формальных языка. $L_1 = \{1, a, 2\}$, $L_2 = \{\varepsilon, a, 3\}$. Вычислить: L_1L_2, L_2^3, $L_1 \backslash L_2$.

Задана контекстно свободная грамматика $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A, B\}$, $T=\{a, b\}$,

P: $S \to bA|aB$, $A \to a|aS|bAA$, $B \to b|bS|aBB$.

Построить схему вывода сентенции: *abba*, дерево разбора, семантическое дерево и все сечения дерева.

Постройте контекстно свободную грамматику, которая порождает следующий язык:

$L = \{a^m b^k c^m | m, k, > = 1\}$.

Задана грамматика G=(N, T, P, S), построить ε-свободную грамматику.

$S \rightarrow bA|aB$, $A \rightarrow a|aBA|bAC$, $B \rightarrow b|bC|aAB$, $C \rightarrow a|b|c|\varepsilon$.

Вариант № 3

1. Найдите все суффиксы, префиксы и подстроки строки: *abbbaa*

2. Пусть L_1 и L_2 два формальных языка. $L_1 = \{\varepsilon, b, a, c\}$, $L_2 = \{\varepsilon, a, b\}$. Вычислить:

$L_2L_2L_1 \setminus (L_1 \cup L_2)$.

3. Задана контекстно свободная грамматика $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$,

P: $S \rightarrow bA|aB$, $A \rightarrow a|aS|bAA$, $B \rightarrow b|bS|aBB$.

Построить схему вывода сентенции: *babbaa* , дерево разбора, семантическое дерево и все сечения дерева.

4. Постройте контекстно свободную грамматику, которая порождает следующий язык:

$L = \{a^m b^k c^k | m, k> = 1\}$.

5. Задана грамматика $G = (N, T, P, S)$, построить ε-свобод-ную грамматику.

$S \rightarrow bA|aAb$, $A \rightarrow a|aBbA|aC$, $B \rightarrow b|bC|aA$, $C \rightarrow a|b|c|\varepsilon$.

Вариант № 4

1. Найдите все суффиксы, префиксы и подстроки строки: 001101.

2. Пусть L_1 и L_2 два формальных языка. $L_1 = \{1, a, 2\}$, $L_2 = \{\varepsilon, a, 3\}$. Вычислить: $L_1 \cup L_2$, $L_1L_2L_1$.

3. Задана контекстно свободная грамматика $G = (N, T, P, S)$, $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$,

P: $S \rightarrow bA|aB$, $A \rightarrow a|aS|bAA$, $B \rightarrow b|bS|aBB$.

Построить схему вывода сентенции: *aabbab* , дерево разбора, семантическое дерево и все сечения дерева.

4. Постройте контекстно свободную грамматику, которая порождает следующий язык:

$L = \{a^m b^m c^k | m, k, > = 1\}$.

5. Задана грамматика G=(N, T, P, S), построить ε-свободную грамматику.

$S \rightarrow bA|aBb$, $A \rightarrow a|aBA|bAaC$, $B \rightarrow b|bC|aAc$, $C \rightarrow a|b|c|\varepsilon$.

Вариант № 5

1. Найдите все суффиксы, префиксы и подстроки строки: 1101110 .

2. Пусть L_1 и L_2 два формальных языка. $L_1 = \{1, 3, 2\}$, $L_2 = \{1, 3\}$. Вычислить:

L_1^2, L_2L_1, $L_1 \cap L_2$.

3. Задана контекстно свободная грамматика G=(N, T, P, S), $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$,

P: $S \rightarrow bA|aB$, $A \rightarrow a|aS|bAA$, $B \rightarrow b|bS|aBB$.

Построить схему вывода сентенции: $bbabaa$, дерево разбора, семантическое дерево и все сечения дерева.

4. Постройте контекстно свободную грамматику, которая порождает следующий язык:

$L = \{a^k b^m c^m | m, k, >= 1\}$.

5. Задана грамматика $G = (N, T, P, S)$, построить ε-свобод-ную грамматику.

$S \rightarrow .A|, B$, $A \rightarrow .|.BA|bA. C$, $B \rightarrow :|:C|aAc$, $C \rightarrow a|b|c|\varepsilon$.